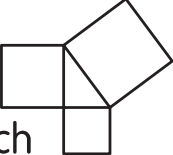


Peter Hagedorn

# Technische Mechanik

Band 3  
**Dynamik**

Verlag  
Harri  
Deutsch 

## **Websites zum Buch**

<http://www.harri-deutsch.de/1835.html>

<http://www.dyn.tu-darmstadt.de/pub/tm/band3/>

## **Der Autor**

Professor Peter Hagedorn vertritt an der Technischen Universität Darmstadt das Fach Technische Mechanik in Lehre und Forschung. Er hält seit mehreren Jahrzehnten Vorlesungen über Technische Mechanik und über Technische Schwingungslehre für Hörer unterschiedlicher Fachrichtungen.

Verlag Harri Deutsch  
Gräfstr. 47  
60486 Frankfurt

[www.harri-deutsch.de](http://www.harri-deutsch.de)  
[verlag@harri-deutsch.de](mailto:verlag@harri-deutsch.de)  
Fax: 069 77 01 58 69

## Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

## **978-3-8171-1835-9**

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus –, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes. Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autor und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

4., überarbeitete Auflage 2008

©Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2008

Druck: fgb – freiburger graphische betriebe <[www.fgb.de](http://www.fgb.de)>

Printed in Germany

# 5 Dynamik der Systeme\*

## 5.1 Eine Umformung der Bewegungsgleichungen (D’ALEMBERTSche Trägheitskräfte)

Systeme, die aus mehreren starren Körpern zusammengesetzt sind, wurden auch schon in Beispielen des letzten Kapitels behandelt. Die Vorgehensweise war dabei so, daß die einzelnen Teilkörper des Systems freigeschnitten wurden, wobei außer den eingepägten Kräften auch Zwangskräfte auftraten. Für jeden starren Körper wurden dann die Bewegungsgleichungen (Schwerpunktsatz, Drallsatz) aufgestellt. Sie enthielten die Zwangskräfte, die anschließend eliminiert werden mußten. Damit ergab sich schließlich ein System von Differentialgleichungen, in dem die Zwangskräfte nicht mehr auftraten.

In diesem Kapitel entwickeln wir neue Methoden zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen zusammengesetzter Systeme; wir erreichen dieses Ziel auf ganz anderen Wegen als vorher. Dabei gelingt es, das Freischneiden der Körper zu vermeiden und direkt zu Bewegungsgleichungen zu gelangen, in denen die Zwangskräfte nicht auftreten. Diese Vorgehensweise kann besonders bei komplizierten Systemen von Vorteil sein und auch dann, wenn das Aufstellen der Bewegungsgleichungen mit Hilfe von Rechenprogrammen automatisiert werden soll.

Zunächst betrachten wir einen einzelnen, ebenen starren Körper und formen seine Bewegungsgleichungen um. Dazu bringen wir im Schwerpunktsatz und im Drallsatz die Trägheitsterme auf die gleiche Seite wie die Kräfte und die Momente:

$$\sum_i \vec{F}_i - m \vec{a}_S = \vec{0}, \quad (5.1)$$

$$\sum_i \vec{M}_i^{(S)} - \dot{\vec{L}}^{(S)} = \vec{0}. \quad (5.2)$$

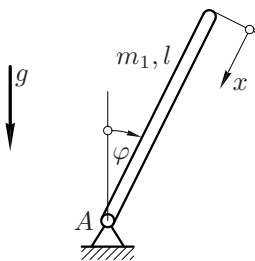
Die Größe  $-m\vec{a}_S$  bezeichnen wir im folgenden als *Scheinkraft*, sie wird auch D’ALEMBERTSche *Trägheitskraft* genannt, die Größe  $-\dot{\vec{L}}^{(S)}$  nennt man *Scheinmoment*. Im ebenen Fall gilt  $\dot{\vec{L}}^{(S)} = \Theta^{(S)} \ddot{\varphi} \vec{e}$ , wobei  $\vec{e}$  der Einheitsvektor senkrecht zur Bewegungsebene ist; bei räumlichen Problemen ist  $\dot{\vec{L}}^{(S)}$  durch die linke Seite von (4.190) gegeben. Werden die Scheinkräfte in (5.1) und das Scheinmoment in (5.2) wie gewöhnliche Kräfte bzw. wie ein gewöhnliches Moment behandelt, so kann man mit den Begriffen aus der Statik (s. TM 1) den durch (5.1), (5.2) dargestellten Sachverhalt auf folgende Weise ausdrücken:

An einem starren Körper bilden die Kräfte  $\vec{F}_i$  mit Angriffspunkten  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , zusammen mit den eingeprägten Momenten  $\vec{M}_i$ , mit der Scheinkraft  $-m \vec{a}_S$  (Angriffspunkt  $S$ ) und dem Scheinmoment  $-\vec{L}^{(S)}$  ein Gleichgewichtssystem.

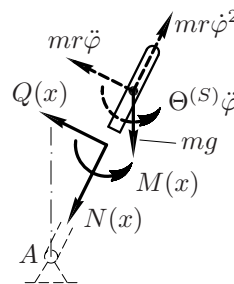
Dieser Sachverhalt wird häufig als D'ALEMBERTSches Prinzip<sup>1</sup> bezeichnet.

Aus der Statik ist bekannt, daß Gleichgewichtsbedingungen auf verschiedene Art und Weise geschrieben werden können. Zum Beispiel gilt natürlich in der Ebene eine vektorielle Kräftegleichung (d.h. zwei skalare Gleichungen) und eine (skalare) Momentengleichung. Ebenso kann man aber bei ebenen Problemen zwei Momentengleichungen um geeignet gewählte Bezugspunkte sowie eine skalare Kräftegleichung schreiben oder auch drei Momentengleichungen allein. Diese Tatsache kann man sich beim Aufstellen der Bewegungsgleichung starrer Körper zunutze machen, indem man die geeigneten „dynamischen Gleichgewichtsbedingungen“ schreibt. Damit gelingt es, bei geeigneter Wahl der Bezugspunkte für die Momentengleichungen zumindest einen Teil der Zwangskräfte von vornherein aus den Bewegungsgleichungen zu beseitigen.

Im folgenden stellen wir für drei Beispiele ebener Systeme die Bewegungsgleichungen unter Verwendung von Scheinkräften und Scheinmomenten auf. Im ersten Beispiel der Abb. 5.1 behandeln wir den homogenen Stab der Masse  $m_1$  und der Länge  $l$ . Er kippt unter Wirkung seines Gewichtes mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}(0) \approx 0$  aus der lotrechten Lage  $\varphi(0) = 0$ ; gesucht sind die Schnittgrößen (s. TM 2) in Abhängigkeit von den Variablen  $\varphi$  und  $x$ . Eine solche Frage tritt z.B. auf, wenn ein an seiner Basis **gesprengter Schornstein** um den Fußpunkt kippt. Über die am Schornstein maximal auftretenden Biegemomente, die eine Funktion des Ortes und der Zeit sind, kann man abschätzen, wo der Schornstein gegebenenfalls brechen wird.



5.1: Der kippende Stab



5.2: Freigeschnittener Stab

Zur Bestimmung der Schnittgrößen  $M(x)$ ,  $N(x)$  und  $Q(x)$  wird ein Teil des Stabes

<sup>1</sup>Jean Le Rond D'ALEMBERT, französischer Mathematiker, Philosoph und Literat, \*1717 in Paris, †1783 ebenda.

an der Stelle  $x$  gemäß Abb. 5.2 freigeschnitten, die Schnittgrößen werden dadurch zu *äußeren* Kräften bzw. Momenten gemacht. Im Freikörperbild werden nun alle auf den oberen Teil wirkenden Kräfte, Scheinkräfte und das Scheinmoment eingetragen. Bei den Kräften handelt es sich um die Schnittkräfte  $N$ ,  $Q$  und die Gewichtskraft  $mg$ . Die Scheinkräfte ergeben sich aus der mit der Masse multiplizierten Schwerpunktsbeschleunigung. Da sich der Schwerpunkt des abgeschnittenen Teils auf einem Kreisbogen mit Radius  $r = l - (x/2)$  bewegt, können die Tangential- und die Normalbeschleunigung ohne weiteres angegeben werden. Die entsprechenden Scheinkräfte sind in Abb. 5.2 durch gestrichelte Pfeile gekennzeichnet, die entgegengesetzt zu den als positiv angenommenen Beschleunigungen eingetragen wurden. Das einzige an dem abgeschnittenen Teil wirkende Moment ist das Biegemoment  $M$ ; als Scheinmoment wirkt noch  $-\dot{L}^{(S)} = -\Theta^{(S)} \ddot{\varphi}$ .

Für den abgeschnittenen Balkenteil ergibt eine Momentengleichung um den Schnittpunkt

$$\sum_i M_i = 0: \quad M(x) + \Theta^{(S)} \ddot{\varphi} + \frac{x}{2} m r \ddot{\varphi} - m g \frac{x}{2} \sin \varphi = 0. \quad (5.3)$$

Auflösen nach dem Biegemoment liefert mit  $m := m_1 x/l$

$$M(x) = m_1 \frac{x^2}{2l} \left[ g \sin \varphi + \left( \frac{x}{3} - l \right) \ddot{\varphi} \right]. \quad (5.4)$$

Das Biegemoment war in Abhängigkeit von  $x$  und  $\varphi$  gesucht, auf der rechten Seite von (5.4) tritt aber noch  $\ddot{\varphi}$  auf. Die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  kann mittels der Bewegungsgleichung leicht eliminiert werden. Mit der Randbedingung  $M(l) = 0$  folgt aus (5.4) unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$g \sin \varphi - \frac{2}{3} l \ddot{\varphi} = 0. \quad (5.5)$$

Dies liefert

$$\ddot{\varphi} = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi, \quad (5.6)$$

so daß sich mit (5.4)

$$M(x) = m_1 g \frac{x^2}{4l} \left( \frac{x}{l} - 1 \right) \sin \varphi \quad (5.7)$$

ergibt. Natürlich hätte man (5.6) auch unmittelbar aus dem Drallsatz für den gesamten Stab um  $A$  gewinnen können. Den Ort des größten Biegemomentes berechnet man mit Hilfe der Ableitung

$$M'(x) = \frac{m_1 g}{4l} \left[ 2x \left( \frac{x}{l} - 1 \right) + \frac{x^2}{l} \right] \sin \varphi. \quad (5.8)$$

Aus  $M'(x) = 0$  folgen  $x_1 = (2/3)l$  und  $x_2 = 0$ : Das betragsmäßig maximale Biegemoment tritt unabhängig von der Winkellage und der Zeit immer an einer festen Stelle des kippenden Stabes auf. Der Wert des Biegemomentes an der Stelle  $x_1 = (2/3)l$  ergibt sich durch Einsetzen in (5.7). Wegen  $M(0) = 0$ ,  $M(l) = 0$  wird der Betrag an der Stelle  $x_1 = (2/3)l$  maximal. Es gilt  $|M(2l/3)| = m_1 g l/27$ .

Die Kräftegleichgewichtsbedingung längs der Stabrichtung liefert

$$N(x) = m r \dot{\varphi}^2 - m g \cos \varphi. \quad (5.9)$$

Hier ist nun auf der rechten Seite die Größe  $\dot{\varphi}^2$  enthalten, die man aber ohne weiteres durch  $\varphi$  ausdrücken kann. Die Energieerhaltung

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \quad (5.10)$$

liefert nämlich mit  $\Theta^{(A)} = m_1 l^2/3$

$$0 + 0 = \frac{1}{2} m_1 \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2 - m_1 g \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi), \quad (5.11)$$

woraus

$$\dot{\varphi}^2 = 3 \frac{g}{l} (1 - \cos \varphi) \quad (5.12)$$

folgt. Damit ergibt sich aus (5.9) mit  $r(x) = l - (x/2)$ ,  $m = m_1 (x/l)$

$$N(x) = m_1 g \frac{x}{l} \left[ -\cos \varphi + 3 \left( 1 - \frac{x}{2l} \right) (1 - \cos \varphi) \right]. \quad (5.13)$$

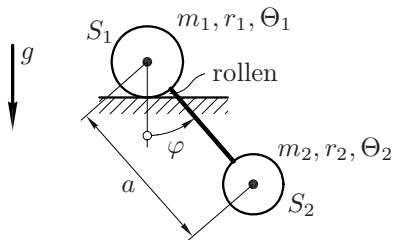
Die Querkraft bestimmt man aus der Kräftegleichgewichtsbedingung quer zur Stabrichtung gemäß

$$Q(x) = m g \sin \varphi - m r \ddot{\varphi}, \quad (5.14)$$

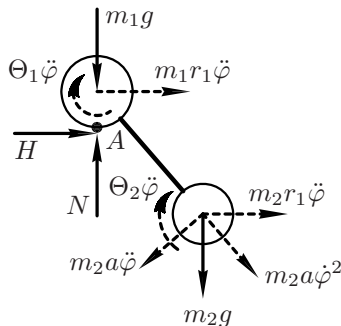
und die Elimination der Winkelbeschleunigung führt auf

$$Q(x) = m_1 g \frac{x}{l} \left( \frac{3}{4} \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \sin \varphi. \quad (5.15)$$

Im zweiten Beispiel bestimmen wir die Bewegungsgleichung für ein **starres System aus zwei homogenen Rollen**, die gemäß Abb. 5.3 über eine Stange vernachlässigbarer Masse miteinander verbunden sind. Die geometrischen Abmessungen, Massen und Trägheitsmomente bezüglich der Walzenschwerpunkte sind gegeben. Das Freikörperbild für das Gesamtsystem ist in Abb. 5.4 dargestellt, Scheinkräfte und Scheinmomente sind dabei wieder gestrichelt gezeichnet. Da die obere Walze auf der waagrechten Ebene abrollt, kann die Beschleunigung ihres Schwerpunktes unmittelbar durch  $\ddot{\varphi}$  ausgedrückt werden. Die Beschleunigung von  $S_2$  ergibt sich in bekannter Weise als Summe der Beschleunigung von  $S_1$  mit dem Anteil



5.3: Starrkörpersystem aus zwei homogenen Rollen



5.4: Freikörperbild zu Abb. 5.3

der Drehbewegung von  $S_2$  bezüglich  $S_1$ . Eine Momentengleichung (Momente und Scheinmomente) für das Gesamtsystem bezüglich  $A$  liefert

$$\sum M_i^{(A)} = 0 : \quad \Theta_1 \ddot{\varphi} + m_1 r_1^2 \ddot{\varphi} + \Theta_2 \ddot{\varphi} + m_2 g a \sin \varphi + m_2 a \dot{\varphi}^2 r_1 \sin \varphi + m_2 a \ddot{\varphi} (a - r_1 \cos \varphi) - m_2 r_1 \ddot{\varphi} (a \cos \varphi - r_1) = 0. \quad (5.16)$$

Daraus folgt

$$\ddot{\varphi} [\Theta_1 + \Theta_2 + m_1 r_1^2 + m_2 (a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \cos \varphi)] + m_2 a (g + r_1 \dot{\varphi}^2) \sin \varphi = 0. \quad (5.17)$$

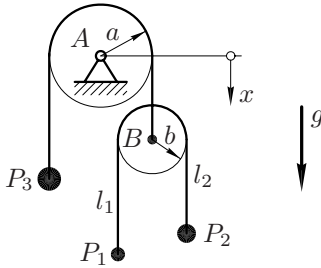
Dies ist schon die gesuchte Differentialgleichung der Bewegung. Für kleine Schwingungen um die lotrechte Gleichgewichtslage wird die Bewegung näherungsweise durch die linearisierte Differentialgleichung

$$[\Theta_1 + \Theta_2 + m_1 r_1^2 + m_2 (a - r_1)^2] \ddot{\varphi} + m_2 g a \varphi = 0 \quad (5.18)$$

beschrieben.

Man kann die Bewegungsgleichung für das System der Abb. 5.3 natürlich auch auf anderem Wege gewinnen. Dazu bestimmt man z.B. den Gesamtschwerpunkt  $S$  und das Massenträgheitsmoment  $\Theta^{(S)}$ . Die Bewegungsgleichungen ergeben sich dann durch Elimination der Zwangskräfte aus dem Drallsatz und dem Schwerpunktsatz. Der erste Lösungsweg hat jedoch den Vorteil, daß die Zwangskräfte  $H$  und  $N$  gar nicht erst in den Gleichungen auftreten.

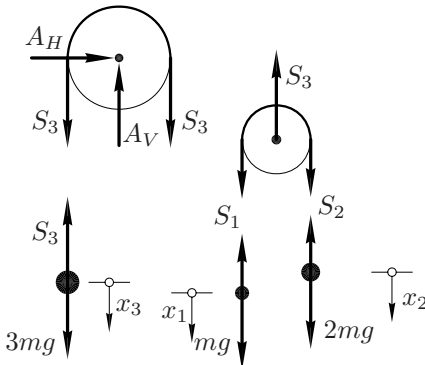
Im letzten Beispiel bestimmen wir die Beschleunigungen der drei Massenpunkte  $P_1, P_2, P_3$  in dem **System aus Seilrollen und Massenpunkten** der Abb. 5.5. Dabei nehmen wir die Rollen als masselos an. Für die Massen von  $P_1, P_2, P_3$  gilt jeweils



5.5: System aus Seilrollen und Massenpunkten

$m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ ,  $m_3 = 3m$ . Mit  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  nach unten positiv gemessen.

Man erkennt, daß die Lage des Systems eindeutig durch *zwei* der drei Koordinaten  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  beschrieben werden kann. Das System hat zwei Freiheitsgrade, und seine Bewegung kann durch zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung dargestellt werden. Wir stellen die Bewegungsgleichungen zunächst ohne Verwendung des D'ALEMBERTSchen Prinzips auf und betrachten dazu das Schnittbild der Abb. 5.6. Für die drei Massenpunkte gilt



5.6: Freikörperbild zu Abb. 5.5

$$m \ddot{x}_1 = m g - S_1, \quad (5.19a)$$

$$2 m \ddot{x}_2 = 2 m g - S_2, \quad (5.19b)$$

$$3 m \ddot{x}_3 = 3 m g - S_3. \quad (5.19c)$$

Wegen  $S_3 = S_1 + S_2$  und  $S_1 = S_2$  kann man das auch als

$$m \ddot{x}_1 = m g - S_1, \quad (5.20a)$$

$$2 m \ddot{x}_2 = 2 m g - S_1, \quad (5.20b)$$

$$3 m \ddot{x}_3 = 3 m g - 2 S_1. \quad (5.20c)$$

schreiben. Wir können nun noch  $S_1$  eliminieren und erhalten so

$$2 m \ddot{x}_2 - m \ddot{x}_1 = m g, \quad (5.21a)$$

$$3 m \ddot{x}_3 - 2 m \ddot{x}_1 = m g. \quad (5.21b)$$



Diese Gleichungen enthalten nun keine Zwangskräfte mehr, allerdings noch drei Beschleunigungen, von denen eine durch die anderen beiden ausgedrückt werden kann. Dies geschieht mit Hilfe der kinematischen Beziehung, die wir anhand von Abb. 5.5 ableiten. Unabhängig von der Lage des Systems gilt wegen der Undehnbarkeit des Seiles

$$l_1 + l_2 = \text{const}, \quad (5.22)$$

und daraus folgt

$$(x_1 - x_B) + (x_2 - x_B) = \text{const} \quad (5.23)$$

und damit

$$x_1 + x_2 - 2x_B = \text{const}. \quad (5.24)$$

Wegen  $x_B = -x_3$  (vgl. Abb. 5.5) kann dies auch als

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{const} \quad (5.25)$$

geschrieben werden. Zweimalige Differentiation führt auf

$$\ddot{x}_3 = -\frac{1}{2}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2). \quad (5.26)$$

Mit (5.26) in (5.21b) eingesetzt nimmt das Gleichungssystem (5.21) die Form

$$-\frac{7}{2}m\ddot{x}_1 - \frac{3}{2}m\ddot{x}_2 = mg, \quad (5.27a)$$

$$2m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1 = mg \quad (5.27b)$$

an. Daraus ergeben sich die Beschleunigungen

$$\ddot{x}_1 = -\frac{7}{17}g, \quad \ddot{x}_2 = \frac{5}{17}g, \quad (5.28)$$

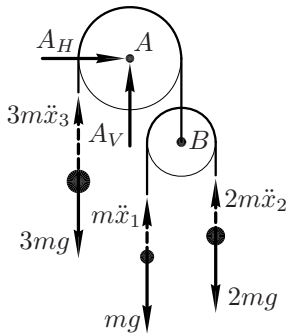
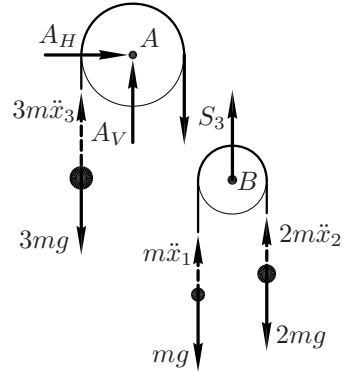
und mit (5.26) folgt auch

$$\ddot{x}_3 = \frac{1}{17}g. \quad (5.29)$$

Wir stellen nun die Bewegungsgleichungen nochmals unter Verwendung des D'ALEMBERTSchen Prinzips auf. Das Gesamtsystem mit dem in  $A$  freigeschnittenen Lager ist mit allen darauf wirkenden äußeren Kräften und Scheinkräften in Abb. 5.7 dargestellt. Eine Momentengleichung bezüglich  $A$  ergibt

$$(3mg - 3m\ddot{x}_3)a - (2mg - 2m\ddot{x}_2)(a+b) - (mg - m\ddot{x}_1)(a-b) = 0, \quad (5.30)$$

worin die Lagerkräfte in  $A$  nicht auftreten. Es ist nicht möglich, weitere Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem anzuschreiben, ohne daß zusätzliche Unbekannte auftreten. Wir schneiden daher das System gemäß Abb. 5.8 auseinander,

5.7: Im Lager  $A$  freigeschnittenes System

5.8: Teilweise freigeschnittenes System

wobei die Seilkraft  $S_3$  als zusätzliche Schnittkraft auftritt. Eine Momentengleichung für das untere Teilsystem um  $B$  liefert

$$(2mg - 2m\ddot{x}_2)b - (mg - m\ddot{x}_1)b = 0. \quad (5.31)$$

Damit sind die Bewegungsgleichungen für das System bekannt. Man beachte, daß lediglich die gesuchten Beschleunigungen sowie die bekannten Gewichtskräfte darin auftreten, nicht jedoch Lager- oder Seilkräfte. Mit der kinematischen Beziehung (5.26) wird  $\ddot{x}_3$  in (5.30) wieder durch  $\ddot{x}_1$  und  $\ddot{x}_2$  ausgedrückt.

Dieses Beispiel macht besonders deutlich, daß es möglich ist, Bewegungsgleichungen für zusammengesetzte Systeme aufzustellen, ohne daß dabei die Zwangskräfte, im vorliegenden Fall die Seil- und die Lagerkräfte, überhaupt auftreten.

## 5.2 Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

Wir betrachten zunächst ein System von  $k$  frei beweglichen Massenpunkten. Ein solches System, bei dem keine Bindungen zwischen den einzelnen Punkten vorhanden sind, bezeichnet man als *ungebundenes System*. Seine Lage wird im dreidimensionalen Fall durch  $3k$  voneinander unabhängigen Koordinaten eindeutig beschrieben, z.B. durch die kartesischen Koordinaten  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k$  der einzelnen Massenpunkte: Das System besitzt  $3k$  Freiheitsgrade. Unser Sonnensystem ist ein Beispiel für ein ungebundenes System von „Massenpunkten“ (sofern man die Abmessungen der Himmelskörper gegenüber ihren relativen Entfernungen vernachlässigt). In der Technik allerdings sind ungebundene Systeme nur von geringer Bedeutung. Meist existieren *Zwangsbedingungen (Bindungen)* zwischen den einzelnen Koordinaten; wir sprechen dann von *gebundenen Systemen*.

Im folgenden nehmen wir an, daß die  $3k$  Koordinaten unseres Systems  $p$  Bindungsgleichungen der Art

$$\underline{f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p} \quad (5.32)$$

erfüllen. Sind diese  $p$  Gleichungen voneinander unabhängig, so kann man

$$\underline{n = 3k - p} \quad (5.33)$$

Koordinaten unabhängig voneinander wählen; die restlichen Koordinaten lassen sich dann aus (5.32) bestimmen. Die Anzahl  $n$  der Freiheitsgrade ist also gemäß (5.33) um  $p$  verringert. Beschränkt man sich auf ebene Probleme, so ist die Anzahl der Freiheitsgrade  $n = 2k - p$ ; falls die Punkte sich nur längs vorgegebener Richtungen verschieben können, gilt  $n = k - p$ . Man beachte, daß die Zwangsbedingungen (5.32) die Zeit  $t$  explizit enthalten können; in vielen Beispielen allerdings wird  $t$  nicht in (5.32) auftreten.

Wir nehmen in diesem Kapitel an, daß die Zwangsbedingungen als Gleichungen zwischen den Koordinaten gegeben sind oder sich auf solche zurückführen lassen. Es gibt jedoch auch Systeme, bei denen Zwangsbedingungen in den Geschwindigkeiten vorliegen, die nicht integriert werden können, d.h. die nicht durch Gleichungen der Art (5.32) zu ersetzen sind. Ein Beispiel dazu ist die auf einer Ebene rollende Kreisscheibe („der rollende Pfennig“), die relativ komplizierte, räumliche Bewegungen ausführen kann. Solche Systeme bezeichnet man als *nichtholonom* (griechisch, „holonom“ = „ganzgesetzlich“). Sie werden hier ausgeschlossen, obwohl das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, das wir in 5.2 angeben, schon von LAGRANGE<sup>2</sup> für den allgemeinen Fall formuliert wurde.

Da (5.32) für alle Zeiten erfüllt sein soll, liefert Differentiation bezüglich  $t$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_j}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial f_j}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \dots \\ & \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \dot{y}_k + \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \dot{z}_k + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Diese Gleichung besagt, daß in einem gebundenen System auch die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte nicht unabhängig voneinander sind, sondern ebenfalls ein Gleichungssystem erfüllen müssen. Die Geschwindigkeitskomponenten treten nur linear in diesen Gleichungen auf. In Matrixschreibweise können wir daher (5.34) als

$$\underline{\mathbf{G} \mathbf{v} = \mathbf{h}} \quad (5.35)$$

<sup>2</sup>Nach Joseph Louis DE LAGRANGE, französischer Mathematiker, \*1736 in Turin, †1813 in Paris.

schreiben. Hierbei ist  $\mathbf{G}$  die  $p \times 3k$  Matrix

$$\mathbf{G} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_k} \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

während  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{h}$   $3k$ - bzw.  $p$ -Spaltenmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &:= (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k)^T \\ &= (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, \dots, v_{kx}, v_{ky}, v_{kz})^T, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{h} := -\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial f_p}{\partial t}\right)^T \quad (5.38)$$

sind. Wir setzen im folgenden voraus, daß  $\mathbf{G}$  maximalen Rang hat, d.h.  $\text{Rang}(\mathbf{G}) = p$ .

Spaltenmatrizen  $\mathbf{v}$ , die (5.35) erfüllen, entsprechen Geschwindigkeitszuständen, die mit den Bindungen verträglich, d.h. die kinematisch *möglich* sind. Eine Spaltenmatrix  $\mathbf{v}$ , die (5.35) erfüllt, stellt deswegen auch einen *möglichen Geschwindigkeitszustand* des Systems dar.

Zusätzlich zu den möglichen Geschwindigkeitszuständen benötigen wir noch einen weiteren kinematischen Begriff, nämlich den der *virtuellen Geschwindigkeitszustände*. Mit Hilfe dieses Begriffs werden wir die Bewegungsgleichungen in einer neuen, sehr praktischen Form schreiben können.

Dazu betrachten wir das zu (5.35) gehörende *homogene* Gleichungssystem

$$\mathbf{G} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (5.39)$$

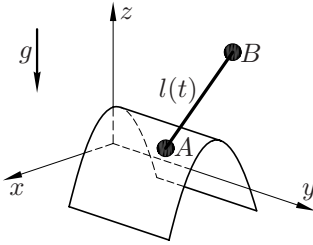
Die Lösungsvektoren von (5.39) bezeichnen wir als *virtuelle Geschwindigkeitszustände* des Systems. Sie entsprechen Geschwindigkeitszuständen des Systems, die i.a. nicht mit den Bindungen (5.34) verträglich sind, und erfüllen ein Gleichungssystem, bei dem die partiellen Ableitungen nach der Zeit weggelassen wurden, d.h. bei denen gewissermaßen „die Zeit eingefroren“ wurde. Im allgemeinen sind die virtuellen Geschwindigkeitszustände keine möglichen Geschwindigkeitszustände und die möglichen sind keine virtuellen. Lediglich, wenn die Bindungen (5.32) zeitunabhängig (= *skleronom*) sind, fallen die virtuellen mit den möglichen Geschwindigkeitszuständen zusammen. Wir schreiben für die virtuellen Geschwindigkeitszustände auch

$$\bar{\mathbf{v}} := (\bar{v}_{1x}, \bar{v}_{1y}, \bar{v}_{1z}, \dots, \bar{v}_{kx}, \bar{v}_{ky}, \bar{v}_{kz})^T. \quad (5.40)$$

Aus  $\text{Rang}(\mathbf{G}) = p$  folgt, daß (5.39)  $n = 3k - p$  linear unabhängige Lösungsvektoren besitzt. Sei  $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$  eine Basis des Raumes der Lösungen von (5.39). Jeder virtuelle Geschwindigkeitszustand  $\bar{\mathbf{v}}$  ist dann eine Linearkombination von  $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2, \dots, \bar{\mathbf{v}}_n$  und kann als

$$\bar{\mathbf{v}} = \alpha_1 \bar{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{v}}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\mathbf{v}}_n \quad (5.41)$$

geschrieben werden, wobei die  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$  beliebige Konstanten sind. Im folgenden veranschaulichen wir den Begriff „virtueller Geschwindigkeitszustand“ anhand zweier Beispiele und geben solche Basen an.



5.9: Hantel im Raum

Die zwei Massenpunkte der Abb. 5.9 sind durch eine masselose Stange der Länge  $l(t)$  verbunden (**Hantel**). Die Funktion  $l(t)$  sei vorgegeben, d.h. die Länge der Hantel ist eine gegebene Funktion der Zeit; sie kann auch konstant sein. Der Punkt  $A$  sei außerdem an die Fläche  $z = r - \frac{1}{2}ax^2$  gebunden. Die Koordinaten der zwei Punkte erfüllen demnach die Bindungen

$$\frac{1}{2} a x_A^2 + z_A = r, \quad (5.42a)$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2(t). \quad (5.42b)$$

Die sechs kartesischen Koordinaten der beiden Punkte erfüllen daher die beiden Bindungsgleichungen

$$f_A(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, t) := \frac{1}{2} a x_A^2 + z_A - r = 0, \quad (5.43a)$$

$$f_B(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, t) := \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - l^2(t) = 0, \quad (5.43b)$$

wobei zur besseren Übersichtlichkeit die Abkürzungen  $\Delta x = x_A - x_B$ ,  $\Delta y = y_A - y_B$  sowie  $\Delta z = z_A - z_B$  eingeführt wurden. Das System besitzt dann vier Freiheitsgrade. Ableitung der Bindungsgleichungen nach der Zeit liefert

$$a x_A \dot{x}_A + \dot{z}_A = 0, \quad (5.44a)$$

$$\dot{x}_A \Delta x + \dot{y}_A \Delta y + \dot{z}_A \Delta z - \dot{x}_B \Delta x - \dot{y}_B \Delta y - \dot{z}_B \Delta z - l(t) \dot{l}(t) = 0, \quad (5.44b)$$

bzw. in Kurzform

$$\mathbf{G} \mathbf{v} = \mathbf{h} \quad (5.45)$$

mit

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a x_A & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z \end{pmatrix}, \quad (5.46a)$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ l(t) \dot{l}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.46b)$$

Wir werden nun einen Satz von vier linear unabhängigen virtuellen Geschwindigkeitszuständen, d.h. Lösungen von

$$\mathbf{G} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad (5.47)$$

bestimmen. Setzen wir z.B. in (5.47)  $\bar{v}_1 = 0$  und  $\bar{v}_3 = 0$ , so ist die erste der beiden skalaren Gleichungen in (5.47) identisch erfüllt und die zweite nimmt die Form

$$\Delta y \bar{v}_2 - \Delta x \bar{v}_4 - \Delta y \bar{v}_5 - \Delta z \bar{v}_6 = 0 \quad (5.48)$$

an. Setzen wir hier  $\bar{v}_2 = \Delta x$ ,  $\bar{v}_5 = 0$  und  $\bar{v}_6 = 0$  so folgt

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = (0, \Delta x, 0, \Delta y, 0, 0)^T, \quad (5.49a)$$

als erste der drei nichttrivialen Lösungen von (5.48) (unter der Annahme  $\bar{v}_1 = 0$ ,  $\bar{v}_3 = 0$ ). Es ist nicht schwer zu zeigen, daß zwei weitere durch

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = (0, 1, 0, 0, 1, 0)^T, \quad (5.49b)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_3 = (0, \Delta z, 0, 0, 0, \Delta y)^T \quad (5.49c)$$

gegeben sind. Auch eine vierte, von den drei vorhergehenden linear unabhängige nichttriviale Lösung von (5.47) kann man leicht bestimmen, z.B.

$$\bar{\mathbf{v}}_4 = (\Delta y, a x_A \Delta z - \Delta x, -a x_A \Delta y, 0, 0, 0)^T. \quad (5.49d)$$

Jeder virtuelle Geschwindigkeitszustand kann als Linearkombination von  $\bar{\mathbf{v}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_2$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_3$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_4$  gemäß (5.49a) bis (5.49d) dargestellt werden:

$$\bar{\mathbf{v}} = \alpha_1 \bar{\mathbf{v}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{v}}_2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{v}}_3 + \alpha_4 \bar{\mathbf{v}}_4. \quad (5.50)$$

Da das Gleichungssystem (5.47) homogen ist, kommt es auf die Maßeinheiten der Lösungsvektoren nicht an.

Eine zu (5.49) alternative Basis des Raumes der virtuellen Geschwindigkeitszustände ist z.B.

$$\bar{\mathbf{v}}_1^* = (0, 0, 0, \Delta y, -\Delta x, 0)^T, \quad (5.51a)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_2^* = (0, 1, 0, 0, 1, 0)^T, \quad (5.51b)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_3^* = (0, 0, 0, 0, \Delta z, -\Delta y)^T, \quad (5.51c)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_4^* = (\Delta y, a x_A \Delta z - \Delta x, -a x_A \Delta y, 0, 0, 0)^T, \quad (5.51d)$$

wobei wir wieder die aus (5.46) bekannten Abkürzungen verwendet haben. Andere Basen sind natürlich ebenfalls möglich. Jeder dieser virtuellen Geschwindigkeitszustände kann mit (5.40) auch in Form von virtuellen Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen Massenpunkte geschrieben werden. Für die virtuellen Geschwindigkeitszustände nach (5.49) gilt

$$\vec{v}_{A,1} = \Delta x \vec{e}_y, \quad \vec{v}_{B,1} = \Delta y \vec{e}_x, \quad (5.52a)$$

$$\vec{v}_{A,2} = \vec{e}_y, \quad \vec{v}_{B,2} = \vec{e}_y, \quad (5.52b)$$

$$\vec{v}_{A,3} = \Delta z \vec{e}_y, \quad \vec{v}_{B,3} = \Delta y \vec{e}_z, \quad (5.52c)$$

$$\vec{v}_{A,4} = \Delta y \vec{e}_x + (ax_A \Delta z - \Delta x) \vec{e}_y - ax_A \Delta y \vec{e}_z, \quad \vec{v}_{B,4} = \vec{0}. \quad (5.52d)$$

Oft ist es auch ohne weiteres möglich, die virtuellen Geschwindigkeitszustände durch unmittelbare Anschauung zu erkennen, ohne dazu die Bindungen explizit nach der Zeit ableiten zu müssen. So entspricht z.B. (5.52b) dem virtuellen Geschwindigkeitszustand, bei dem sich die Hantel mit zeitlich festgehaltener Zwangsbedingung (Lösung des *homogenen* Gleichungssystems (5.47) also  $\dot{l}(t)=0$ ) in Richtung  $\vec{e}_y$  bewegt. Diese anschauliche Bestimmung der virtuellen Geschwindigkeitszustände werden wir in den nächsten Beispielen wieder aufgreifen.

Im zweiten Beispiel betrachten wir den ohne Reibung **auf einer Stange gleitenden Massenpunkt  $P$** . Die Stange bewegt sich gemäß Abb. 5.10 in der  $x, y$ -Ebene. Die Koordinaten des Punktes  $P$  erfüllen demnach die Zwangsbedingungen

$$z = 0, \quad (5.53a)$$

$$x + y - s(t) = 0, \quad (5.53b)$$

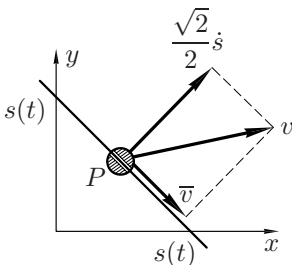
wobei die Funktion  $s(t)$  vorgegeben ist. Dies führt für die Komponenten  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$ ,  $v_z = \dot{z}$  der möglichen Geschwindigkeit auf die Gleichungen

$$v_z = 0, \quad (5.54a)$$

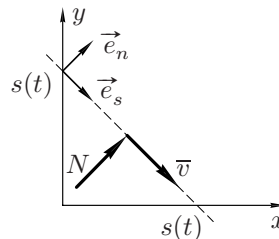
$$v_x + v_y - \dot{s}(t) = 0. \quad (5.54b)$$

Die virtuellen Geschwindigkeitszustände erfüllen daher das homogene Gleichungssystem

$$\mathbf{G} \vec{v} = \mathbf{0}. \quad (5.55)$$



5.10: Massenpunkt auf bewegter Stange gleitend



5.11: Zwangskraft am Punkt  $P$  und virtuelle Geschwindigkeit  $\vec{v}$

mit

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Das System hat nur einen Freiheitsgrad, und jeder virtuelle Geschwindigkeitszustand ist ein Vielfaches von

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, -1, 0)^T. \quad (5.57)$$

Diese Spaltenmatrix bildet also die Basis des Raumes der virtuellen Geschwindigkeiten, d.h. jede virtuelle Geschwindigkeit kann als

$$\vec{\mathbf{v}} = \alpha(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \quad (5.58)$$

geschrieben werden, wobei wir nun im Vergleich zu (5.52) auf den Index verzichtet haben, da es nur einen Massenpunkt gibt.

Anhand des letzten Beispiels können wir den Nutzen des Begriffs „virtuelle Geschwindigkeit“ erklären. Zunächst bilden wir den Einheitsvektor  $\vec{e}_s$  in Richtung der Stange, gemäß Abb. 5.11. Es gilt offensichtlich

$$\vec{e}_s = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y). \quad (5.59)$$

Der Einheitsvektor in Richtung der Normalen zur Stange in der  $x$ - $y$ -Ebene ist dementsprechend

$$\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y). \quad (5.60)$$

Die Projektion des Vektors  $\vec{\mathbf{v}}$  (mögliche Geschwindigkeit des Punktes  $P$ ) in Richtung der Normalen zur Stange ist

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{e}_n = (v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y) \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x + v_y). \quad (5.61)$$

Gemäß (5.54) gilt daher

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{s}(t). \quad (5.62)$$

Dies ist die Geschwindigkeit, mit der sich jeder Punkt der Stange in Richtung  $\vec{e}_n$  bewegt. Andererseits gilt

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{e}_n = 0 \quad (5.63)$$

und

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{e}_z = 0, \quad (5.64)$$



wie man leicht anhand von (5.58) feststellt. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 5.10 dargestellt. Man erkennt, daß hier die Beziehung

$$\vec{v} = \vec{v} + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{s}(t) \vec{e}_n \quad (5.65)$$

zwischen einer virtuellen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und einer möglichen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  besteht. Die virtuelle Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist hier klar als Geschwindigkeit von  $P$  bei festgehaltener Stange erkennbar. Damit die Summe (5.65) im Hinblick auf die Dimensionen sinnvoll ist, muß die Einheit von  $\alpha$  in (5.58) entsprechend gewählt werden.

Wenn im System der Abb. 5.10 zwischen Massenpunkt und Stange keine Reibung vorhanden ist, wirkt die Führungskraft orthogonal zur Stange. Sie ist damit gemäß Abb. 5.11 orthogonal zu jedem virtuellen Geschwindigkeitsvektor ihres Kraftangriffspunktes; d.h. es gilt

$$\vec{N} \cdot \vec{v} = 0. \quad (5.66)$$

Dabei ist  $\vec{N}$  aber i.a. nicht orthogonal zu den *möglichen* Geschwindigkeitsvektoren des Massenpunktes, denn diese besitzen ja (infolge der Führungsbewegung der Stange) eine Komponente in Richtung  $\vec{N}$ , außer für  $\dot{s}(t) = 0$ .

Diese Situation ist nicht nur für das vorliegende Beispiel typisch, sondern gilt analog bei einer großen Klasse von Systemen, auch für das System des ersten Beispiels. Das Skalarprodukt (5.66) kann als Leistung der Führungskraft  $\vec{N}$  infolge der virtuellen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  interpretiert werden.

Immer dann, wenn in einem System ausschließlich *ideale Bindungen* (d.h. Bindungen ohne Reibungskräfte) vorliegen, ist die Summe der Leistungen aller Zwangskräfte bei jeder virtuellen Geschwindigkeit gleich Null! Mit dieser Erkenntnis können die Bewegungsgleichungen für Systeme von Massenpunkten ganz erheblich vereinfacht werden. Teilen wir die Resultierende  $\vec{F}_i$  der auf den  $i$ -ten Massenpunkt wirkenden Kräfte ein in die Resultierenden der eingepprägten Kräfte  $\vec{F}_i^*$  und der Zwangskräfte  $\vec{Z}_i$ , so schreibt sich das NEWTONsche Grundgesetz für den  $i$ -ten Massenpunkt als

$$\vec{F}_i^* + \vec{Z}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{0}. \quad (5.67)$$

In Matrixschreibweise fassen wir diese Gleichungen zusammen zu

$$\mathbf{F}^* + \mathbf{Z} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (5.68)$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & & & & & & 0 \\ & m_1 & & & & & \\ & & m_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & m_k & & \\ & & & & & m_k & \\ 0 & & & & & & m_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \\ \vdots \\ r_{kx} \\ r_{ky} \\ r_{kz} \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

$$\mathbf{F}^* = (F_{1x}^*, F_{1y}^*, F_{1z}^*, \dots, F_{kx}^*, F_{ky}^*, F_{kz}^*)^T, \quad (5.70)$$

$$\mathbf{Z} = (Z_{1x}, Z_{1y}, Z_{1z}, \dots, Z_{kx}, Z_{ky}, Z_{kz})^T. \quad (5.71)$$

Für ideale Bindungen gilt aber

$$\mathbf{Z}^T \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (5.72)$$

so daß sich (5.68) nach Multiplikation mit  $\bar{\mathbf{v}}^T$  zu

$$(\mathbf{F}^* - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}})^T \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (5.73)$$

vereinfacht. Die Bedingung (5.72) ist gleichsam die Definition für ideale Bindungen: Ideale Bindungen sind solche, bei denen die Leistung der Zwangskräfte infolge einer virtuellen Geschwindigkeit verschwindet. Das bedeutet nicht, daß die einzelnen Zwangskräfte keine Arbeit leisten, lediglich die *Summe* dieser Arbeiten bzw. Leistungen muß verschwinden.

Die Tatsache, daß (5.73) für beliebige virtuelle Geschwindigkeiten gilt, bezeichnet man als *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten* oder *Prinzip der virtuellen Leistungen*. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert genau  $n = 3k - p$  Bewegungsgleichungen, wenn man nacheinander  $n$  linear unabhängige Geschwindigkeitszustände  $\bar{\mathbf{v}}_s$  einsetzt:

$$(\mathbf{F}^* - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}})^T \bar{\mathbf{v}}_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (5.74)$$

Da diese Gleichungen linear homogen in  $\bar{\mathbf{v}}_s$  sind, kommt es auf den Betrag und die Dimensionen von  $\bar{\mathbf{v}}_s$  nicht an. Jeder der Basisvektoren kann noch mit einer beliebigen, dimensionsbehafteten Konstante durchmultipliziert werden.

Wesentlich ist dabei, daß die Zwangskräfte in den so erhaltenen Gleichungen nicht auftreten. Die oft mühsame Elimination der Zwangskräfte entfällt also bei dieser Art der Herleitung der Bewegungsgleichungen! In den folgenden Abschnitten werden wir (5.73) noch mehrfach umformen.

Auch der Sonderfall der Statik ist in (5.73) wieder enthalten. Wenn alle Beschleunigungen gleich Null sind, gilt

$$\mathbf{F}^* \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (5.75)$$

Die durch (5.75) gegebenen Gleichgewichtsbedingungen sind schon aus der Statik (TM 1) bekannt. Dort wurden allerdings statt der Komponenten der virtuellen Geschwindigkeiten  $\vec{\mathbf{v}}$ , die der infinitesimal kleinen, in einem Zeitintervall  $dt$  diesen Geschwindigkeiten entsprechenden *virtuellen Verrückungen* verwendet:

$$\delta \vec{\mathbf{r}}_i = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)^T, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (5.76)$$

Damit schreibt sich (5.75) als

$$\mathbf{F}^{*T} \delta \mathbf{r} = 0, \quad (5.77)$$

bzw.

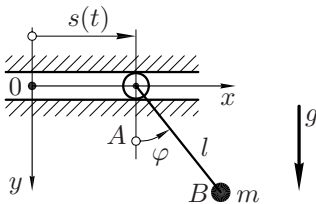
$$\sum_{i=1}^k \vec{\mathbf{F}}_i^* \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_i = 0. \quad (5.78)$$

Ganz entsprechend kann man statt (5.73) auch

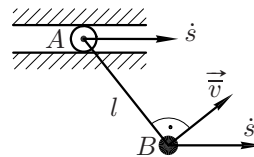
$$\boxed{(\mathbf{F}^* - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}})^T \delta \mathbf{r} = 0} \quad (5.79)$$

schreiben. Man bezeichnet dies als *Prinzip der virtuellen Verrückungen* oder *Prinzip der virtuellen Arbeiten*. Da es auf die physikalischen Dimensionen und auch auf die Größe der virtuellen Geschwindigkeiten nicht ankommt, sind die Gleichungen (5.79) und (5.73) vollkommen äquivalent. Gedanklich ist es einfacher, mit den virtuellen Geschwindigkeiten zu arbeiten, die ja endliche Größen sind, als mit den infinitesimal kleinen Verrückungen.

Die Gewinnung der Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten hat gegenüber der Verwendung von Schwerpunktsatz und Drallsatz den Vorteil, daß die Zwangskräfte automatisch herausfallen. Wir untersuchen dies zunächst an einigen Beispielen. Später bringen wir dann (5.73) durch Einführung anderer Koordinaten in eine noch einfachere Form.



5.12: Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt



5.13: Geschwindigkeiten der Punkte A und B

Zunächst stellen wir für das **Pendel mit waagrecht bewegtem Aufhängepunkt** der Abb. 5.12 die Bewegungsgleichungen auf; die Funktion  $s(t)$  sei vorgegeben und

lediglich der ebene Fall wird betrachtet. Die Koordinaten des Massenpunktes erfüllen die Zwangsbedingung

$$f(x, y, t) := l^2 - [x - s(t)]^2 - y^2 = 0, \quad (5.80)$$

und das System besitzt einen Freiheitsgrad. Aus (5.80) folgt

$$[x - s(t)] \dot{s}(t) - [x - s(t)] v_x - y v_y = 0. \quad (5.81)$$

Dies ist die inhomogene Gleichung für die Komponenten  $v_x, v_y$  der möglichen Geschwindigkeiten. Die Komponenten  $\bar{v}_x, \bar{v}_y$  der virtuellen Geschwindigkeiten erfüllen dagegen die homogene Gleichung

$$[x - s(t)] \bar{v}_x + y \bar{v}_y = 0 \quad (5.82)$$

(wegen der Zeitabhängigkeit der Bindungen sind hier virtuelle und mögliche Geschwindigkeiten verschieden). Diese Gleichung besagt, daß die Vektoren  $(\bar{v}_x, \bar{v}_y)$  senkrecht auf  $(x - s, y)$ , d.h. senkrecht auf  $\overrightarrow{AB}$  stehen (s. Abb. 5.13). Die virtuelle Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist die Geschwindigkeit von  $B$  bei festgehaltener Zwangsbedingung, d.h. bei festgehaltenem Gelenkpunkt  $A$ . Die Lösungen von (5.82) haben bis auf einen skalaren Faktor die Gestalt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x - s(t) \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$(\mathbf{F}^* - m \ddot{\mathbf{r}})^T \vec{v} = 0 \quad (5.84)$$

liefert also

$$(-m\ddot{x}, mg - m\ddot{y}) \begin{pmatrix} -y \\ x - s \end{pmatrix} = 0. \quad (5.85)$$

Daraus folgt unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$y \ddot{x} + (g - \ddot{y}) [x - s(t)] = 0. \quad (5.86)$$

Sie enthält allerdings noch zwei Koordinaten  $x(t)$  und  $y(t)$  bzw. deren Ableitungen nach der Zeit, obwohl das System nur einen Freiheitsgrad besitzt. Es ist also notwendig, entweder eine dieser Größen mit Hilfe der Zwangsbedingung (5.80) zu eliminieren, oder aber das Gleichungssystem zu ergänzen; letzteres ist rechentechnisch die einfachere Möglichkeit. Differenziert man (5.81) nochmals nach der Zeit, so folgt

$$[x - s(t)] [\ddot{x} - \ddot{s}(t)] + [\dot{x} - \dot{s}(t)]^2 + y \ddot{y} + \dot{y}^2 = 0. \quad (5.87)$$

Mit (5.86) und (5.87) liegt jetzt ein Differentialgleichungssystem in den beiden unbekannt Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  vor, das zu lösen ist. Die Anfangswerte von  $x, \dot{x}, y, \dot{y}$  müssen dabei natürlich mit (5.80) und (5.81) verträglich sein.

Die andere Möglichkeit, Elimination einer der Variablen in (5.86), ist hier etwas umständlicher und führt auf komplizierte Ausdrücke. Wir können z.B.  $y(t)$  eliminieren. Aus (5.80) folgt zunächst

$$y = \sqrt{l^2 - [x - s(t)]^2}, \quad (5.88)$$

und Ableitung nach der Zeit liefert

$$\dot{y} = -\frac{(x - s)(\dot{x} - \dot{s})}{\sqrt{l^2 - (x - s)^2}}. \quad (5.89)$$

Eine weitere Differentiation bezüglich  $t$  ergibt einen Ausdruck der Form

$$\ddot{y} = g(x, \dot{x}, \ddot{x}, s, \dot{s}, \ddot{s}). \quad (5.90)$$

Einsetzen von (5.88) bis (5.90) in (5.86) ergibt schließlich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion  $x(t)$ , die wir hier nicht explizit angeben. Sie hat allerdings eine recht komplizierte Form, was an der ungeschickten Wahl der Koordinaten liegt.

Wesentlich zweckmäßiger ist es in dem vorliegenden Fall, die Lage des Pendels durch den Winkel  $\varphi(t)$  zu beschreiben. Es gilt nämlich

$$x = s + l \sin \varphi, \quad (5.91a)$$

$$y = l \cos \varphi, \quad (5.91b)$$

und die Zwangsbedingung (5.80) ist damit automatisch erfüllt. Differentiation bezüglich  $t$  liefert

$$\dot{x} = \dot{s} + l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (5.92a)$$

$$\dot{y} = -l \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (5.92b)$$

und

$$\ddot{x} = \ddot{s} + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \quad (5.93a)$$

$$\ddot{y} = -l \ddot{\varphi} \sin \varphi - l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \quad (5.93b)$$

Setzt man dies in (5.86) ein, so folgt unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{\ddot{s}(t)}{l} \cos \varphi \quad (5.94)$$

in  $\varphi(t)$ .

Noch etwas bequemer wird der Lösungsweg, wenn man auch erkennt, daß die virtuelle Geschwindigkeit  $\vec{v}$  in Abb. 5.13 von der Gestalt

$$\vec{v} = \alpha \vec{e}_\varphi \quad (5.95)$$

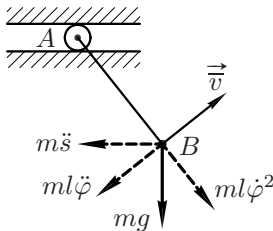
ist, mit der willkürlichen Konstanten  $\alpha$ . Dann folgt mit

$$\vec{F}^* = m g \vec{e}_y, \quad (5.96)$$

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{e}_x + l \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - l \dot{\varphi}^2 \vec{e}_r \quad (5.97)$$

aus (5.73) unmittelbar die Differentialgleichung (5.94).

Natürlich wäre es auch möglich gewesen, ohne den Umweg über die kartesischen Koordinaten zu dieser Bewegungsgleichung zu gelangen. In Abb. 5.14 sind alle



5.14: Scheinkräfte und eingeprägte Kräfte am Pendel der Abb. 5.12

auf den Massenpunkt wirkenden eingepprägten Kräfte und Scheinkräfte gemeinsam mit dem Vektor  $\vec{v}$  der virtuellen Geschwindigkeit eingetragen. (Die Zwangskräfte brauchen wir nicht zu berücksichtigen!) Projiziert man Kräfte und Scheinkräfte auf die Richtung von  $\vec{v}$  und setzt die Summe dieser Projektionen gleich Null, so folgt unmittelbar wieder (5.94). Im nächsten Abschnitt werden wir ganz allgemein neue Koordinaten so einführen, daß die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind, wie es in diesem Beispiel für den Winkel  $\varphi$  der Fall war. Damit entfällt dann die lästige Elimination überzähliger Koordinaten.

Im zweiten Beispiel behandeln wir das **System aus Seilrollen und Massenpunkten** der Abb. 5.5, das wir schon in Abschnitt 5.1 untersucht hatten. Wir beschränken uns wieder auf die lotrechte Bewegung der Massenpunkte und stellen jetzt die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten auf. Hier gilt die Zwangsbedingung

$$f(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \quad (5.98)$$

und daraus folgt mit  $v_i = \dot{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$

$$v_1 + v_2 + 2v_3 = 0. \quad (5.99)$$

Diese Gleichung hat die Gestalt

$$\mathbf{G} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (5.100)$$

$$\mathbf{G} = (1, 1, 2). \quad (5.101)$$

Da die Zwangsbedingung nicht von der Zeit abhängt, ist die rechte Seite von (5.100) gleich Null, und die möglichen Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  sind hier mit den virtuellen Geschwindigkeiten  $\vec{v}$  identisch. Das System hat  $n = 2$  Freiheitsgrade, so daß der

Raum der virtuellen Geschwindigkeiten zweidimensional ist. Eine Basis des Raumes der virtuellen Geschwindigkeiten ist z.B. durch

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = (1, -1, 0)^T. \quad (5.102a)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = (2, 0, -1)^T \quad (5.102b)$$

gegeben. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert

$$\begin{pmatrix} m g - m \ddot{x}_1 \\ 2 m g - 2 m \ddot{x}_2 \\ 3 m g - 3 m \ddot{x}_3 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}_s^T = 0, \quad s = 1, 2, \quad (5.103)$$

woraus mit (5.102) die beiden Bewegungsgleichungen

$$m g - m \ddot{x}_1 - 2 m g + 2 m \ddot{x}_2 = 0, \quad (5.104a)$$

$$2 m g - 2 m \ddot{x}_1 - 3 m g + 3 m \ddot{x}_3 = 0 \quad (5.104b)$$

folgen. Sie können zu

$$\ddot{x}_1 - 2 \ddot{x}_2 = -g, \quad (5.105a)$$

$$2 \ddot{x}_1 - 3 \ddot{x}_3 = -g \quad (5.105b)$$

vereinfacht werden. Diese Gleichungen enthalten noch die Ableitungen der drei unbekannt Funktionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ , obwohl das System nur zwei Freiheitsgrade hat. Eine der drei Variablen kann daher eliminiert werden. Eine weitere Differentiation von (5.99) ergibt

$$\ddot{x}_3 = -\frac{1}{2} (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2), \quad (5.106)$$

und die Elimination von  $\ddot{x}_3$  aus (5.105) liefert schließlich

$$\ddot{x}_1 - 2 \ddot{x}_2 = -g, \quad (5.107a)$$

$$7 \ddot{x}_1 + 3 \ddot{x}_2 = -2g. \quad (5.107b)$$

Diese Bewegungsgleichungen treten jetzt an die Stelle von (5.27a) und (5.27b), die eine andere Form hatten. Auflösung nach den Beschleunigungen ergibt auch hier wieder

$$\ddot{x}_1 = -\frac{7}{17} g, \quad (5.108a)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{5}{17} g, \quad (5.108b)$$

woraus man dann mittels (5.106)

$$\ddot{x}_3 = \frac{1}{17} g \quad (5.109)$$

bestimmt. Wir werden später auf dieses Beispiel ein weiteres Mal zurückkommen.

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten wurde bisher nur für Systeme von Massenpunkten angegeben. Es gilt ganz entsprechend natürlich auch für Systeme starrer Körper. Für ein *räumliches System starrer Körper* gelten ja die Bewegungsgleichungen

$$\vec{F}_i^* + \vec{Z}_i - m \ddot{\vec{r}}_i = \vec{0}, \quad (5.110a)$$

$$\vec{M}_i^* + \vec{M}_i^Z - \dot{\vec{L}}_i = \vec{0}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (5.110b)$$

wobei  $\vec{r}_i$  der Ortsvektor des Schwerpunktes des  $i$ -ten Körpers ist. Der Bezugspunkt sowohl für alle Momente als auch für den Drall ist jeweils der Schwerpunkt des  $i$ -ten Körpers. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nimmt dann die Form

$$\left[ (\mathbf{F}^* - \dot{\mathbf{I}})^T \vec{\mathbf{v}} + (\mathbf{M}^* - \dot{\mathbf{L}})^T \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0 \right] \quad (5.111)$$

an, mit

$$\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} F_{1x}^* \\ F_{1y}^* \\ \vdots \\ F_{kz}^* \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} m_1 \ddot{r}_{1x} \\ m_1 \ddot{r}_{1y} \\ \vdots \\ m_k \ddot{r}_{kz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} M_{1x}^* \\ M_{1y}^* \\ \vdots \\ M_{kz}^* \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \dot{L}_{1x} \\ \dot{L}_{1y} \\ \vdots \\ \dot{L}_{kz} \end{pmatrix}, \quad (5.112)$$

wobei

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \boldsymbol{\Theta}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \vec{\boldsymbol{\omega}}_i \times \boldsymbol{\Theta}_i \vec{\boldsymbol{\omega}}_i \quad (5.113)$$

die Zeitableitung des Dralls des  $i$ -ten starren Körpers ist (siehe Abschnitt 4.2). Für ebene Probleme vereinfachen sich diese Ausdrücke natürlich. Die Spaltenmatrix der virtuellen Geschwindigkeiten  $\vec{\mathbf{v}}$  und die der virtuellen Winkelgeschwindigkeiten  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  bilden gemeinsam eine Lösung des homogenen Teils der Bindungsgleichungen (in den Zeitableitungen) und die Zwangskräfte  $\vec{Z}_i$  und die Zwangsmomente  $\vec{M}_i^Z$  erfüllen die Bedingung

$$\mathbf{Z}^T \vec{\mathbf{v}} + \mathbf{M}^Z T \vec{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad (5.114)$$

für alle virtuellen kinematischen Zustände  $(\vec{\mathbf{v}}, \vec{\boldsymbol{\omega}})$ . Das heißt, die virtuelle Leistung der Zwangskräfte und Zwangsmomente verschwindet in der Summe.

Es bietet sich natürlich auch an,  $\vec{\mathbf{v}}$  und  $\vec{\boldsymbol{\omega}}$  zu einer einzigen Spaltenmatrix zusammenzufassen, die man dann der Einfachheit halber wieder als  $\vec{\mathbf{v}}$  bezeichnet. Faßt man auch jeweils  $\mathbf{F}^*$  und  $\mathbf{M}^*$  sowie  $\dot{\mathbf{I}}$  und  $\dot{\mathbf{L}}$  zu je einer Spaltenmatrix zusammen, so kann auch für Systeme starrer Körper das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten wieder einfach als

$$\left[ (\mathbf{F}^* - \dot{\mathbf{I}})^T \vec{\mathbf{v}} = 0 \right] \quad (5.115)$$



geschrieben werden.

Wir behandeln nun noch das Beispiel der Abb. 5.15 (**Seiltrommel, Walze, Gewicht**), in dem zwei zylindrische Walzen reibungsfrei in  $A$  und  $B$  gelagert sind und aufeinander abrollen. Es wurde schon in Abb. 4.18 dargestellt und in 4.1.1 behandelt. Die drei Größen  $\bar{v}_y$ ,  $\bar{\omega}_1$ ,  $\bar{\omega}_2$  sind nicht voneinander unabhängig, sondern hängen über zwei Zwangsbedingungen zusammen. Die eine Walze ist mit einer Seiltrommel verbunden, an deren Ende ein Gewicht hängt. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten (5.73) liefert hier unmittelbar

$$(m g - m \ddot{y}) \bar{v}_y - \Theta_1^{(B)} \dot{\varphi}_1 \bar{\omega}_1 - \Theta_2^{(A)} \dot{\varphi}_2 \bar{\omega}_2 = 0. \quad (5.116)$$

Die beiden kinematischen Bedingungen (Zwangsbedingungen)

$$a_2 \varphi_2 - a_1 \varphi_1 = 0, \quad (5.117)$$

$$r \varphi_1 - y = 0 \quad (5.118)$$

entsprechen auf der Geschwindigkeitsebene den Gleichungen

$$-a_1 \bar{\omega}_1 + a_2 \bar{\omega}_2 = 0, \quad (5.119)$$

$$-\bar{v}_y + r \bar{\omega}_1 = 0 \quad (5.120)$$

für die Komponenten des Vektors der virtuellen Geschwindigkeit. Das System besitzt einen Freiheitsgrad, so daß jede virtuelle Geschwindigkeit

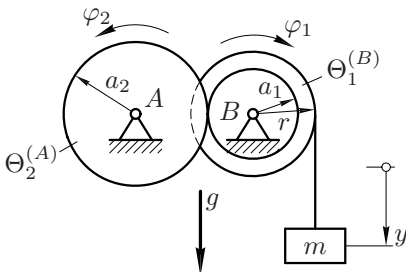
$$\bar{\mathbf{v}} := (\bar{v}_y, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)^T \quad (5.121)$$

bis auf einen Faktor mit

$$\bar{\mathbf{v}} = \left( r, 1, \frac{a_1}{a_2} \right)^T \quad (5.122)$$

übereinstimmt. Da die Bindungen zeitunabhängig sind, sind auch in diesem Beispiel die virtuellen mit den möglichen Geschwindigkeiten identisch. Einsetzen in (5.116) und Ausdrücken von  $\dot{\varphi}_1$ ,  $\dot{\varphi}_2$  durch  $\ddot{y}$  mittels (5.117), (5.118) liefert die Bewegungsgleichung

$$m g - \left( m + \frac{\Theta_1^{(B)}}{r^2} + \frac{\Theta_2^{(A)}}{r^2} \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) \ddot{y} = 0. \quad (5.123)$$



5.15: Ebenes System mit einem Freiheitsgrad

Dieses Beispiel belegt auf eindrucksvolle Weise, wie es mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten gelingt, die Bewegungsgleichungen aufzustellen, ohne das System in einzelne starre Körper zu zerschneiden. Damit wird die Elimination der Zwangskräfte überflüssig.

## 5.3 LAGRANGESCHE GLEICHUNGEN

Im folgenden werden wir durch Einführung geeigneter Koordinaten das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten (5.73) in eine neue Form bringen, wobei wir uns zunächst wieder auf Massenpunktsysteme beschränken. Dazu wählen wir *verallgemeinerte Koordinaten*  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , die weitgehend beliebig sind, jedoch so, daß zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Lage des Systems eindeutig durch  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  beschrieben wird. Darüber hinaus soll die Anzahl dieser verallgemeinerten Koordinaten minimal sein, d.h. gleich der Anzahl der Freiheitsgrade. Der Ortsvektor des  $i$ -ten Massenpunktes kann daher als

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (5.124)$$

geschrieben werden, wobei die Zwangsbedingungen (5.32) automatisch erfüllt sein sollen. Die Ableitung von (5.124) nach  $t$  ergibt

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (5.125)$$

Eine weitere Ableitung von (5.125) nach der Zeit liefert  $\ddot{\vec{r}}_i$  in Abhängigkeit von  $q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n$  und  $t$ . Im Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten (5.73) können wir daher alle Beschleunigungen und alle von den Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängenden Kräfte durch diese Größen ausdrücken.

Wir wenden uns nun den virtuellen Geschwindigkeiten zu, die als Lösungsvektoren von (5.39) definiert waren. Die verallgemeinerten Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_n$  sind so definiert, daß die Bindungsglieder

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (5.126)$$

identisch erfüllt sind, wenn man die Funktion (5.124) bzw.  $x_i(q_1, \dots, q_n, t)$ ,  $y_i(q_1, \dots, q_n, t)$ ,  $z_i(q_1, \dots, q_n, t)$  einsetzt. Ableitung von (5.126) nach der Zeit ergibt

$$\begin{aligned} \frac{df_j}{dt} &= \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \dot{q}_s \\ &+ \left[ \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_j}{\partial t} \right] = 0, \quad (5.127) \\ &j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Die Definition der verallgemeinerten Koordinaten ist derart, daß diese Gleichung für beliebige Werte von  $q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t$  erfüllt ist. Daraus folgt zunächst, daß die eckige Klammer in (5.127) identisch verschwindet. Weiterhin folgt, daß

$$\sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) = 0, \quad (5.128)$$

$$j = 1, 2, \dots, p, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

identisch gilt. Vergleicht man dies mit der Definitionsgleichung (5.39) für die virtuellen Geschwindigkeiten

$$\mathbf{G} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad (5.129)$$

so erkennt man, daß für  $s = 1, 2, \dots, n$  der  $3k$ -dimensionale Vektor

$$\bar{\mathbf{v}}_s = \left( \frac{\partial x_1}{\partial q_s}, \frac{\partial y_1}{\partial q_s}, \frac{\partial z_1}{\partial q_s}, \dots, \frac{\partial x_k}{\partial q_s}, \frac{\partial y_k}{\partial q_s}, \frac{\partial z_k}{\partial q_s} \right)^T \quad (5.130)$$

eine Lösung von (5.129) ist. Die Vektoren  $\bar{\mathbf{v}}_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$  bilden eine Basis des Raumes der virtuellen Geschwindigkeiten. Mit

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} := \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \vec{e}_x + \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \vec{e}_y + \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \vec{e}_z \quad (5.131)$$

ergeben sich daher aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\sum_{i=1}^k \left( \vec{F}_i^* - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \cdot \bar{\vec{v}}_{i,s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (5.132)$$

die  $n$  Gleichungen

$$\sum_{i=1}^k \left( \vec{F}_i^* - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (5.133)$$

Dies ist ein System von  $n$  Differentialgleichungen in  $q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s$  und  $t$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ), sofern man überall  $\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) durch diese Größen ausdrückt. Man bezeichnet sie als *LAGRANGESche Gleichungen erster Art*. Sie werden in Rechenprogrammen zur automatischen Erstellung der Bewegungsgleichungen komplizierter Systeme verwendet. Wir verzichten hier auf Beispiele zu (5.133) und formen diese Gleichungen zunächst noch weiter um.

Dazu teilen wir zunächst noch die eingepägten Kräfte  $\vec{F}_i^*$  auf gemäß

$$\vec{F}_i^* = \vec{F}_{P_i}^* + \vec{F}_{N_i}^*. \quad (5.134)$$

Dabei sind die  $\vec{F}_{P_i}^*$  diejenigen eingepprägten Kräfte, die als

$$\vec{F}_{P_i}^* = - \left( \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i} \right)^T, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (5.135)$$

mit einem *Potential* der Art

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_k, t) \quad (5.136)$$

geschrieben werden können. Falls (5.136) nicht von der Zeit abhängt, entspricht diese Funktion der bekannten potentiellen Energie. Wir schreiben nun (5.133) als

$$\sum_{i=1}^k \left( \vec{F}_{P_i}^* + \vec{F}_{N_i}^* \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} - \sum_{i=1}^k m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (5.137)$$

Die erste Summe in (5.137) nimmt mit (5.135) die Form

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \vec{F}_{P_i}^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} &= - \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right) \\ &= - \frac{\partial U}{\partial q_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.138)$$

an. Weiterhin führen wir die *verallgemeinerten Kräfte*

$$Q_s = \sum_i \vec{F}_{N_i}^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (5.139)$$

ein.

Es gilt außerdem die Identität

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \right) \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (5.140)$$

(s. Anhang C). Mit der kinetischen Energie

$$T := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (5.141)$$

und unter Verwendung von (5.140) kann man daher die zweite Summe in (5.137) als

$$\sum_{i=1}^k m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} \quad (5.142)$$

schreiben.

Damit ist es nun möglich, die Bewegungsgleichungen in sehr übersichtlicher Art und Weise darzustellen. Zunächst drückt man die kinetische Energie  $T$  und das Potential  $U$  mittels (5.124), (5.125) durch die verallgemeinerten Koordinaten und deren Zeitableitungen aus und definiert die LAGRANGE-Funktion gemäß

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, t) \quad (5.143)$$

mit  $\mathbf{q} := (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ . Im Gegensatz zur gesamten mechanischen Energie  $T + U$  ist  $L$  die Differenz von kinetischer und potentieller Energie! Damit kann nun (5.137) unter Verwendung von (5.142) und (5.138) als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (5.144)$$

geschrieben werden. Dies sind die LAGRANGESchen Gleichungen zweiter Art, sie werden oft auch einfach als LAGRANGESche Gleichungen bezeichnet.

Bei der Verwendung der LAGRANGESchen Gleichungen zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen ist es also lediglich notwendig, die kinetische und die potentielle Energie durch die verallgemeinerten Koordinaten und deren Zeitableitungen auszudrücken. Gegebenenfalls sind noch die verallgemeinerten Kräfte  $Q_i$  zu berechnen, wenn nicht alle Kräfte aus einem Potential ableitbar sind. Da die Geschwindigkeiten quadratisch in der kinetischen Energie enthalten sind, spielen die Vorzeichen der Geschwindigkeiten dabei keine Rolle. Kinematische Überlegungen bezüglich der Beschleunigungen sind nicht notwendig; sie werden dadurch umgangen, daß in (5.144) differenziert wird. Bei bekannter LAGRANGE-Funktion ergeben sich die Bewegungsgleichungen dann durch einfache Differentiation.

Die LAGRANGESchen Gleichungen bilden einen der Grundpfeiler der *analytischen Mechanik*. Sie gelten auch für Systeme starrer Körper, wobei in (5.144) lediglich die entsprechenden Ausdrücke für die kinetische Energie einzusetzen sind. Wenn nur konservative Kräfte auftreten, verschwinden die verallgemeinerten Kräfte  $Q_s$  auf der rechten Seite von (5.144). Wir beschränken uns im folgenden auf diesen Fall.

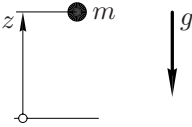
Als Sonderfall enthalten die LAGRANGESchen Gleichungen die Gleichgewichtsbedingungen der Statik. Hier gilt mit  $T \equiv 0, Q_s = 0, s = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial U}{\partial q_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n; \quad (5.145)$$

die potentielle Energie ist also in der Gleichgewichtslage stationär. Darüber hinaus wissen wir aus TM 1, daß die Gleichgewichtslagen bei einem Minimum der potentiellen Energie stabil sind.

Eine hinreichende Bedingung für das Minimum der Funktion  $U$  an einem stationären Punkt ist die positive Definitheit der Matrix der zweiten Ableitungen:

$$\left[ \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right] > 0. \quad (5.146)$$



5.16: Lotrecht fallender Massenpunkt

Als erstes, triviales Beispiel betrachten wir einen **Massenpunkt im freien Fall** längs der Lotrechten (Abb. 5.16). Mit  $n = 1$  und  $q = z$  gilt

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2, \quad U = m g z \quad (5.147)$$

und

$$L := T - U = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - m g z. \quad (5.148)$$

Aus der LAGRANGESchen Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad (5.149)$$

folgt nun die Differentialgleichung der Bewegung. Der erste Summand von (5.149) ergibt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt} m \dot{z} = m \ddot{z}, \quad (5.150)$$

der zweite führt auf

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -m g. \quad (5.151)$$

Damit ist die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{z} + m g = 0 \quad (5.152)$$

bzw.

$$\ddot{z} = -g. \quad (5.153)$$

Im nächsten Beispiel leiten wir nochmals die Bewegungsgleichungen für das **System aus Seilrollen und Massenpunkten** der Abb. 5.5 her, die wir schon früher

auf verschiedenen Wegen gewonnen hatten. Mit  $n = 2$  und den verallgemeinerten Koordinaten

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2 \quad (5.154)$$

ergibt sich für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2. \quad (5.155)$$

Dabei ist

$$v_1 = \dot{x}_1, \quad v_2 = \dot{x}_2, \quad v_3 = -\frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2), \quad (5.156)$$

so daß in den Zeitableitungen der verallgemeinerten Koordinaten jetzt

$$T = \frac{1}{2} m \left( \frac{7}{4} \dot{x}_1^2 + \frac{3}{2} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{11}{4} \dot{x}_2^2 \right) \quad (5.157)$$

gilt. Die potentielle Energie ist

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - m_3 g x_3. \quad (5.158)$$

Mit

$$x_3 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (5.159)$$

schreiben wir sie als Funktion der beiden verallgemeinerten Koordinaten:

$$U = \frac{1}{2} m g (x_1 - x_2). \quad (5.160)$$

Die LAGRANGESchen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.161)$$

liefern die Bewegungsgleichungen

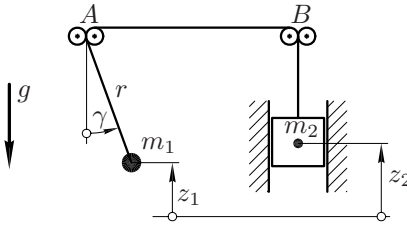
$$\frac{7}{4} m \ddot{x}_1 + \frac{3}{4} m \ddot{x}_2 + \frac{1}{2} m g = 0, \quad (5.162a)$$

$$\frac{3}{4} m \ddot{x}_1 + \frac{11}{4} m \ddot{x}_2 - \frac{1}{2} m g = 0. \quad (5.162b)$$

Sie ergeben natürlich wieder die schon in (5.108) berechneten Beschleunigungen.

In einem weiteren Beispiel untersuchen wir das System **Fadenpendel und lotrecht geführter Körper** der Abb. 5.17. Es besitzt zwei Freiheitsgrade. Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir

$$q_1 = r, \quad q_2 = \gamma. \quad (5.163)$$



5.17: Ebenes System mit zwei Freiheitsgraden

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (5.164)$$

und mit

$$v_1^2 = (r \dot{\gamma})^2 + \dot{r}^2, \quad (5.165)$$

$$v_2^2 = \dot{r}^2 \quad (5.166)$$

folgt

$$T(r, \gamma, \dot{r}, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\gamma}^2. \quad (5.167)$$

Die potentielle Energie ergibt sich leicht zu

$$U = m_1 g z_1 + m_2 g z_2. \quad (5.168)$$

Es gilt  $z_1 = z_A - r \cos \varphi$  und  $z_2 = z_B - (l - l_1 - r)$ , wobei  $l$  die gesamte Fadenlänge und  $l_1 = |\overline{AB}|$  ist. Da die additiven Konstanten im folgenden hier keine Rolle spielen, kann man auch einfach

$$U(r, \gamma) = m_2 g r - m_1 g r \cos \gamma \quad (5.169)$$

schreiben. Mit  $L = T - U$  bilden wir gemäß (5.144) zunächst die Ableitung nach  $\dot{q}_1 = \dot{r}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2) \dot{r} \quad (5.170)$$

und damit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2) \ddot{r}. \quad (5.171)$$

Der zweite Summand in den LAGRANGESchen Gleichungen (5.144) nimmt mit  $q_1 = r$  die Form

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m_1 r \dot{\gamma}^2 + m_1 g \cos \gamma - m_2 g \quad (5.172)$$



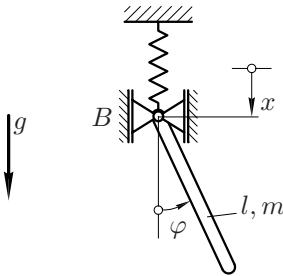
an. Daraus folgt

$$(m_1 + m_2) \ddot{r} - m_1 r \dot{\gamma}^2 - m_1 g \cos \gamma + m_2 g = 0. \quad (5.173a)$$

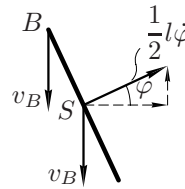
Ganz entsprechend folgt mit  $q_2 = \gamma$  aus (5.144)

$$m_1 r^2 \ddot{\gamma} + 2 m_1 r \dot{r} \dot{\gamma} + m_1 g r \sin \gamma = 0. \quad (5.173b)$$

Das nichtlineare System von Differentialgleichungen (5.173) kann nur numerisch gelöst werden.



5.18: Starrkörperpendel mit gefedertem Aufhängepunkt



5.19: Zur Kinematik des Pendels der Abb. 5.18

Als letztes Beispiel behandeln wir das **Starrkörperpendel mit gefedertem Aufhängepunkt** der Abb. 5.18. Das System besitzt zwei Freiheitsgrade, und wir wählen die Größen  $x$  und  $\varphi$  als verallgemeinerte Koordinaten. Die kinetische Energie des Stabes ist

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \Theta^{(S)} \dot{\varphi}^2. \quad (5.174)$$

Darin müssen wir die Schwerpunktgeschwindigkeit  $\vec{v}_S$  noch durch die verallgemeinerten Koordinaten und deren Zeitableitungen ausdrücken. Dies gelingt z.B. mittels

$$\vec{v}_S = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{BS}, \quad (5.175)$$

und es folgt mit  $\vec{v}_B = \dot{x} \vec{e}_x$

$$v_S^2 = \left( \dot{x} - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \right)^2 + \left( \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \right)^2 \quad (5.176)$$

(s. Abb. 5.19). Mit  $\Theta^{(S)} = (1/12) m l^2$  schreibt sich die kinetische Energie als

$$T = \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 - l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2 \right). \quad (5.177)$$

In diesem Beispiel nehmen wir ausnahmsweise an, daß die Feder im System der Abb. 5.18 eine *nichtlineare Kennlinie* besitzt. Es möge sich hierbei um eine kubische Kennlinie handeln, so daß

$$F = k x^3 \quad (5.178)$$

ist. Dem entspricht die potentielle Energie

$$U_F = \frac{1}{4} k x^4, \quad (5.179)$$

wobei die Länge  $x$  von der ungespannten Lage der Feder aus gezählt ist. Die potentielle Energie der eingepprägten Kräfte an dem betrachteten System ist demnach

$$U = \frac{1}{4} k x^4 - m g \left( x + \frac{l}{2} \cos \varphi \right). \quad (5.180)$$

Mit  $L = T - U$  und den verallgemeinerten Koordinaten  $q_1 = \varphi$ ,  $q_2 = x$  liefert die LAGRANGESche Gleichung (5.144)

$$\ddot{x} - \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi - \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \frac{k}{m} x^3 - g = 0, \quad (5.181a)$$

$$-\ddot{x} \frac{l}{2} \sin \varphi + \frac{l^2}{3} \ddot{\varphi} + g \frac{l}{2} \sin \varphi = 0. \quad (5.181b)$$

Die zu beliebig gegebenen Anfangsbedingungen gehörende Lösung von (5.181) kann nur numerisch gefunden werden, da die Gleichungen nichtlinear sind. Als spezielle Lösungen der Bewegungsgleichungen können wir allerdings die möglichen Gleichgewichtslagen berechnen.

Mit dem Lösungsansatz  $x(t) \equiv x_S$ ,  $\varphi(t) \equiv \varphi_S$  für die stationären Lösungen (Gleichgewichtslagen) von (5.181) ergibt sich

$$\frac{k}{m} x_S^3 - g = 0, \quad (5.182a)$$

$$\sin \varphi_S = 0 \quad (5.182b)$$

mit der Lösung

$$x_S = \sqrt[3]{\frac{mg}{k}}, \quad \varphi_{S_{1,2}} = 0, \pi. \quad (5.183)$$

Von den beiden gefundenen Gleichgewichtslagen ist offensichtlich die des aufrecht stehenden Stabes ( $\varphi_{S_2} = \pi$ ) instabil.

Dies sind die einzigen Lösungen von (5.181), die wir exakt angeben können. Allerdings wissen wir aus der Anschauung, daß das System in der Nähe der stabilen Gleichgewichtslage kleine Schwingungen ausführen kann, die näherungsweise durch linearisierte Differentialgleichungen beschrieben werden. Im folgenden untersuchen

wir diese kleinen Schwingungen um die untere Gleichgewichtslage  $x_S = \sqrt[3]{m g/k}$ ,  $\varphi_{S_1} = 0$ . Gemäß

$$x(t) = x_S + \bar{x}(t), \quad (5.184a)$$

$$\varphi(t) = \varphi_{S_1} + \bar{\varphi}(t) \quad (5.184b)$$

führen wir die neuen Variablen  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{\varphi}(t)$  ein, die die Bewegung um diese Gleichgewichtslage beschreiben. Setzt man (5.184) in die Bewegungsgleichungen ein, so ergeben sich Gleichungen, die in den neuen Variablen homogen sind. Wir beschränken uns nun auf kleine Schwingungen und unterschlagen in den Bewegungsgleichungen alle Terme höherer Ordnung als der ersten in  $\bar{x}$ ,  $\bar{\varphi}$ . Das bedeutet, daß wir in

$$(x_S + \bar{x})^3 = x_S^3 + 3x_S^2\bar{x} + 3x_S\bar{x}^2 + \bar{x}^3 \quad (5.185)$$

lediglich die ersten beiden Summanden beibehalten und in

$$\sin \bar{\varphi} = \bar{\varphi} - \frac{\bar{\varphi}^3}{3!} \dots, \quad (5.186)$$

$$\cos \bar{\varphi} = 1 - \frac{\bar{\varphi}^2}{2!} \dots \quad (5.187)$$

den Sinus durch den Winkel  $\bar{\varphi}$  und den Kosinus durch Eins ersetzen. Damit ergeben sich die linearen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\bar{x}} + \left(3 \frac{k}{m} x_S^2\right) \bar{x} = 0, \quad (5.188a)$$

$$\frac{l^2}{3} \ddot{\bar{\varphi}} + g \frac{l}{2} \bar{\varphi} = 0, \quad (5.188b)$$

die im vorliegenden Fall entkoppelt sind. Beide Gleichungen können leicht gelöst werden, und die Lösungen  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{\varphi}(t)$  beschreiben harmonische Schwingungen mit unterschiedlicher Kreisfrequenz.

Die Linearisierung war hier besonders einfach, weil die trigonometrischen Funktionen um den Winkel  $\varphi_{S_1} = 0$  linearisiert wurden. Für  $\varphi_S \neq 0$  erhält man statt (5.186) und (5.187)

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_S + \bar{\varphi}) &= \sin \varphi_S \cos \bar{\varphi} + \cos \varphi_S \sin \bar{\varphi} \\ &\approx \sin \varphi_S + (\cos \varphi_S) \bar{\varphi}, \end{aligned} \quad (5.189)$$

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_S + \bar{\varphi}) &= \cos \varphi_S \cos \bar{\varphi} - \sin \varphi_S \sin \bar{\varphi} \\ &\approx \cos \varphi_S - (\sin \varphi_S) \bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (5.190)$$

## 5.4 Zusammenfassung

Zunächst haben wir in diesem Kapitel das D'ALEMBERTSche Prinzip formuliert, das besagt, daß an jedem starren Körper die auf ihn wirkenden Kräfte und eingepägten

Momente mit der Scheinkraft  $-m\vec{a}_S$  (Angriffspunkt  $S$ ) und dem Scheinmoment  $-\vec{L}^{(S)}$  ein Gleichgewichtssystem bilden. Mit Hilfe des Erstarrungsprinzips kann es sinngemäß auf Systeme starrer Körper erweitert werden.

Für Systeme starrer Körper mit idealen (reibungsfreien) Bindungen gilt das *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten*

$$\left( \mathbf{F}^* - \dot{\mathbf{I}} \right)^T \bar{\mathbf{v}} + \left( \mathbf{M}^* - \dot{\mathbf{L}} \right)^T \bar{\boldsymbol{\omega}} = 0. \quad (5.191)$$

Dabei beinhalten  $\mathbf{F}^*$  und  $\mathbf{M}^*$  die auf die Körper wirkenden eingepprägten Kräfte und Momente (bezüglich des jeweiligen Schwerpunkts  $S$ ). In  $\mathbf{I}$  und  $\mathbf{L}$  sind jeweils die Impulse bzw. die Drehimpulse der Körper zusammengefaßt. Die Größen  $\bar{\mathbf{v}}$  und  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  erfüllen die auf Geschwindigkeitsebene formulierten Bindungsgleichungen, wenn die inhomogenen Terme durch Null ersetzt werden. Es gibt genau  $n$  ( $n = \text{Anzahl der Freiheitsgrade}$ ) voneinander linear unabhängige virtuelle kinematische Zustände  $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ . Durch Einsetzen des jeweiligen virtuellen kinematischen Zustands führt (5.191) auf die  $n$  Differentialgleichungen der Bewegung.

Anschließend wurden für ein System mit  $n$  Freiheitsgraden die verallgemeinerten Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_n$  eingeführt, die zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Lage des Systems eindeutig beschreiben. Die LAGRANGE-Funktion wurde dann gemäß

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, t) \quad (5.192)$$

definiert. Die Differentialgleichungen der Bewegung kann man dann aus den LAGRANGESchen Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (5.193)$$

erhalten, wobei die verallgemeinerten Kräfte auf der rechten Seite durch

$$Q_s = \sum_i \vec{F}_{N_i}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} \quad s = 1, 2, \dots, n \quad (5.194)$$

definiert sind. Der Index  $N$  steht hier für die nichtkonservativen Kräfte, bzw. für diejenigen eingepprägten Kräfte, die nicht in dem Potential  $U(\mathbf{q}, t)$  berücksichtigt sind.