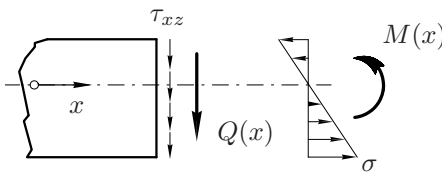


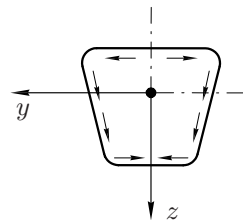
# 5 Schubspannungen infolge Querkraft bei Biegung

## 5.1 Balken mit symmetrischem Vollquerschnitt

Schubspannungen werden in Balken (im geraden Schnitt) sowohl durch Querkräfte als auch durch Torsionsmomente hervorgerufen. Die Torsion wird erst in Kapitel 6 behandelt. Schon im vorliegenden Kapitel, das den *Schubspannungen infolge Querkraft* gewidmet ist, wird aber der Zusammenhang zwischen der Schubspannungsverteilung und diesen beiden Schnittgrößen sichtbar werden. In diesem Kapitel berechnen wir näherungsweise die in einem Balken mit konstantem (oder nur sehr langsam veränderlichem) Querschnitt auftretenden Schubspannungen infolge Querkraft. Die genaue Berechnung ist kompliziert, wir beschränken uns daher auf einfache Näherungen. Im vorliegenden Abschnitt untersuchen wir zunächst Vollquerschnitte, wobei wir noch voraussetzen, daß die  $z$ -Achse eine Symmetrieachse und somit auch eine Trägheitshauptachse des Querschnitts ist. Die Querkraft soll in Richtung der  $z$ -Achse wirken, so daß Biegung um die  $y$ -Achse vorliegt (s. Abb. 5.1a).



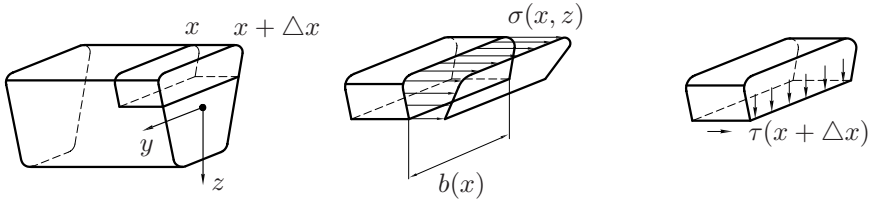
5.1a: Balken mit symmetrischem Vollquerschnitt, Schnittgrößen und Spannungen



5.1b: Verlauf der Schubspannungen am Rande

Alle freien Oberflächen des Balkens sind schubspannungsfrei, und damit folgt aus der Symmetrie des Spannungstensors, daß die Schubspannungen im geraden Schnitt am Rande längs der Tangenten wirken (s. Abb. 5.1b). An jedem Punkt des Querschnitts kann die Schubspannung in Komponenten in Richtung der  $y$ - und der  $z$ -Achse zerlegt werden, und das Flächenintegral der  $z$ -Komponente ergibt gerade die Querkraft. Wir nehmen an, daß die  $z$ -Komponente  $\tau_{xz}$  der Schubspannung (wie auch die Biegenormalspannung) lediglich von  $z$ , nicht jedoch von  $y$  abhängt.

Diese  $z$ -Komponente der Schubspannungen bezeichnen wir der Einfachheit halber im folgenden mit  $\tau(x, z)$ , wir können sie anhand einfacher Gleichgewichtsbetrachtungen bestimmen. Dazu schneiden wir aus dem Balken gemäß Abb. 5.2a ein Element heraus, das die Dicke  $\Delta x$  besitzt und von der oberen Kante des Querschnitts



5.2a: Balkenelement

5.2b: Normalspannungen  
(Biegespannungen)  
am Element5.2c: Schubspannungen in  
zueinander senkrechten  
Schnittflächen

ausgeht. Es erfährt die Biegespannungen gemäß Abb. 5.2b, die durch

$$\sigma(x, z) = \frac{M(x)}{I_y(x)} z \quad (5.1)$$

gegeben sind. Sie wirken natürlich nicht nur auf die rechte, sondern auch auf die linke Stirnfläche. Außerdem wirken auf diesen Stirnflächen noch die Schubspannungen  $\tau(x, z)$  infolge Querkraft mit bisher unbekannter Verteilung. Aus der Symmetrie des Spannungstensors folgt mit  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ , daß gemäß Abb. 5.2c an der rechten unteren Kante des Elements die gleichen Schubspannungen an der Stirnfläche und an der waagrechten Schnittfläche wirken. Die Querkraft erzeugt also Schubspannungen auch in zur  $x, y$ -Ebene parallelen Schnittflächen! Eine Kräftegleichung am Element ergibt

$$\sum F_{ix} = 0 : \int_{z_o}^z [\sigma(x + \Delta x, \bar{z}) - \sigma(x, \bar{z})] b(\bar{z}) d\bar{z} + b(z) \Delta x \tau(x, z) + o(\Delta x) = 0, \quad (5.2)$$

wobei das Flächenintegral nicht über den gesamten Balkenquerschnitt, sondern gemäß Abb. 5.3 nur über die Stirnfläche des Elements läuft und  $z_o < 0$  die obere Kante kennzeichnet. Teilt man (5.2) durch  $\Delta x$ , so folgt mit  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\int_{z_o}^z \frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, \bar{z}) b(\bar{z}) d\bar{z} = -b(z) \tau(x, z). \quad (5.3)$$

Differentiation von (5.1) führt mit  $M'(x) = Q(x)$  für einen Balken konstanten Querschnitts auf

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{Q(x)}{I_y} z. \quad (5.4)$$

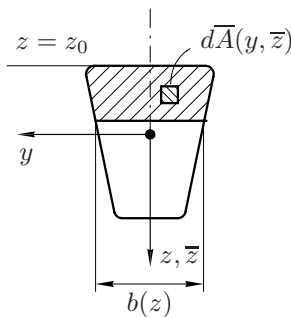
Einsetzen in (5.3) und Auflösen nach  $\tau$  ergibt

$$\tau(x, z) = -\frac{Q(x)}{I_y b(z)} \int_{z_o}^z \bar{z} dA. \quad (5.5)$$

Das Integral auf der rechten Seite kürzen wir durch

$$S(z) := \int_{z_o}^z \bar{z} dA \quad (5.6)$$

ab. Diese Größe ist offensichtlich gerade das *statische Moment* (Moment erster Ordnung) der in Abb. 5.3 gekennzeichneten Fläche, die zwischen der Oberkante des Balkens und der Stelle  $\bar{z} = z$  liegt, sie entspricht der Stirnfläche des Elements der Abb. 5.2c. Da  $z$  ab dem Schwerpunkt gezählt wird, ist  $S(z)$  dem Betrage nach



5.3: Zur Berechnung des statischen Momentes  $S(z)$

auch gleich dem statischen Moment der Fläche zwischen der Unterkante des Querschnitts und der Geraden, die durch den Wert von  $z$  gekennzeichnet ist. Dies folgt unmittelbar aus der Definition des Flächenschwerpunktes.

Damit haben wir die einfache Formel

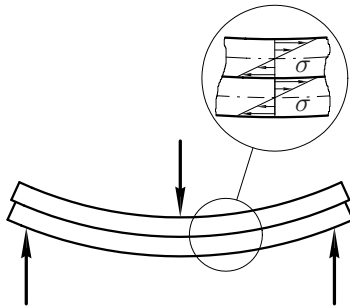
$$\tau(x, z) = -\frac{Q(x)S(z)}{I_y b(z)} \quad (5.7)$$

für die lotrechte Komponente  $\tau_{xz}$  der Schubspannungen infolge Querkraft gewonnen. In vielen Fällen, zum Beispiel beim Rechteckquerschnitt, ist die Komponente  $\tau_{xy}$  vernachlässigbar (bei Biegung um die  $y$ -Achse). Zur Bestimmung von  $\tau$  ist also außer den schon bekannten Größen lediglich noch das statische Moment  $S(z)$  für den jeweils vorliegenden Balkenquerschnitt zu berechnen. Für  $z = z_o$  verschwindet die Stirnfläche des Elements, so daß  $S(z_o) = 0$  ist. Für  $z = z_u$  (untere Kante des Balkens) ist  $S(z_u)$  gleich dem statischen Moment der gesamten Querschnittsfläche; dieses ist gleich Null, weil der Koordinatenursprung definitionsgemäß in den Flächenschwerpunkt gelegt wurde. Daraus folgt auch wieder, daß für  $z = z_u$  und  $z = z_o$  die Schubspannung verschwindet.

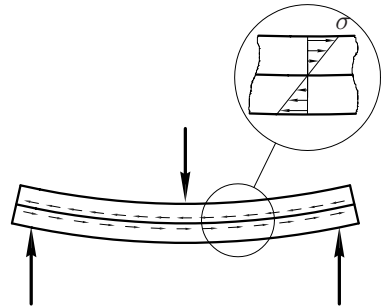
Gelegentlich wird die Schubspannungsverteilung auch anhand einer Gleichgewichtsbetrachtung an einem Element bestimmt, das sich von der unteren Balkenkante nach oben erstreckt, wobei dann das statische Moment der zwischen  $z_u$  und  $z$

liegenden Teilfläche in (5.7) auftritt und sich das Vorzeichen in dieser Formel umkehrt.

Gemäß Abb. 5.2c ruft die lotrecht an einem Punkt der Querschnittsfläche wirkende Schubspannung auch eine gleich große Schubspannung in einer der waagrechten Schnittflächen durch den gleichen Punkt hervor. Die Fähigkeit des Materials, diesen Schubspannungen zu widerstehen, verhindert das Gleiten seiner waagrechten Schichten aufeinander. Dieses Gleiten ist anschaulich klar, wenn zwei frei aufeinanderliegende Balken belastet werden (s. Abb. 5.4a). Verhindert man dieses Gleiten, z.B. durch Verkleben der beiden Balken, so wird auch die Biegesteifigkeit des Systems erheblich erhöht (s. Abb. 5.4b). In dem Fall zweier aufeinanderliegender Rechteckbalken gleicher Breite  $b$ , mit Höhen  $h_1$  bzw.  $h_2$  und Flächenträgheitsmomenten  $I_1 = b h_1^3/12$  bzw.  $I_2 = b h_2^3/12$ , ergibt sich bei schubstarrer Verbindung ein Balken mit Flächenträgheitsmoment  $I = b(h_1 + h_2)^3/12$ , was mit  $h_1 = h_2 = h$  auf  $EI = 2bh^3/3$  führt gegenüber  $EI = EI_1 + EI_2 = bh^3/6$  für die aufeinander gleitenden Lagen. Auch die sich ergebenden Biegespannungen  $\sigma$  sind in Abb. 5.4a eingetragen.



5.4a: Zur Wirkung der Schubspannungen bei Biegung: Balken frei aufliegend



5.4b: Verklebte Balken

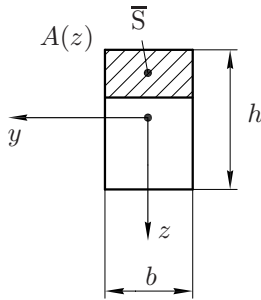
Besonders einfach ist die Schubspannungsverteilung bei einem **Balken mit Rechteckquerschnitt** zu bestimmen, da hier  $b(z) = b = \text{const}$  ist. Wir betrachten dazu den Querschnitt der Abb. 5.5a und berechnen das statische Moment der gekennzeichneten Teilfläche. Da wir den Schwerpunkt  $\bar{S}$  dieser Teilfläche kennen, bestimmen wir das statische Moment bezüglich der  $y$ -Achse mit

$$A(z) = b \left[ \frac{h}{2} + z \right], \quad z_{\bar{S}} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{h}{2} + z \right] \quad (5.8)$$

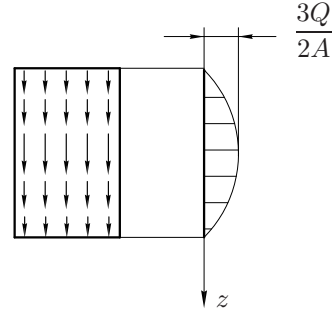
als

$$S(z) = A(z) z_{\bar{S}} = -\frac{b}{2} \left[ \frac{h^2}{4} - z^2 \right] \quad (5.9)$$

(s. TM 1).



5.5a: Berechnung des statischen Moments für den Rechteckquerschnitt



5.5b: Schubspannungsverteilung am Rechteckquerschnitt

Die Schubspannungsverteilung gemäß (5.7) ist also für das Rechteck durch

$$\tau = \frac{Q}{bh^3} \frac{b}{2} \left[ \frac{h^2}{4} - z^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left[ 1 - (2z/h)^2 \right] \quad (5.10)$$

gegeben. Sie hat einen bezüglich  $z$  parabolischen Verlauf (Abb. 5.5b). Beim Rechteck wird die Schubspannung demnach für  $z = 0$  maximal, und das Maximum ist das 1,5-fache der mittleren Schubspannung  $Q/bh$ :

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \quad (5.11)$$

Da beim Balken mit Rechteckquerschnitt ein ebener Spannungszustand vorliegt, ist die  $y$ -Komponente  $\tau_{xy}$  überall gleich Null, so daß die ermittelte  $z$ -Komponente  $\tau_{xz}$  in diesem Fall mit der resultierenden Schubspannung identisch ist.

Auch für den **Kreisquerschnitt** kann die Schubspannungsverteilung mittels (5.7) leicht bestimmt werden. In TM 1 hatten wir den Flächeninhalt und die Schwerpunktlage der schraffierten Fläche der Abb. 5.6a gemäß

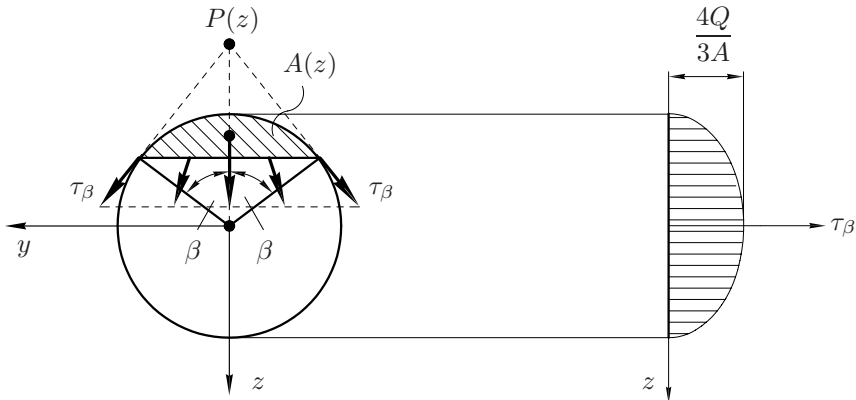
$$A = \frac{R^2}{2} (2\beta - \sin 2\beta), \quad z_{\bar{S}} = -\frac{4}{3} R \frac{\sin^3 \beta}{2\beta - \sin 2\beta} \quad (5.12)$$

berechnet, und damit gilt

$$S(\beta) = A(z) z_{\bar{S}} = -\frac{2}{3} R^3 \sin^3 \beta, \quad (5.13)$$

so daß mit  $I_y = \pi R^4/4$  und  $b = 2R \sin \beta$

$$\tau = -\frac{QS}{I_y b} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \sin^2 \beta \quad (5.14)$$



**5.6a:** Berechnung des statischen Moments für den Kreisquerschnitt

**5.6b:** Schubspannungsverteilung  $\tau_\beta$  am Rand des Kreisquerschnitts

folgt. Den größten Wert nimmt  $\tau$  hier für  $\beta = \pi/2$  (d.h.  $z = 0$ ) an, und dieser Wert entspricht  $4/3$  der mittleren Schubspannung  $Q/A$ .

Mit (5.14) haben wir jedoch nur die  $z$ -Komponente  $\tau_{xz}$  der Schubspannung bestimmt; die  $y$ -Komponenten  $\tau_{xy}$  verschwinden hier nicht, da die Schubspannungen am Rande des Querschnitts tangential verlaufen und dieser nicht parallel zur  $z$ -Achse ist. Wir bezeichnen diese Schubspannungen am Rande mit  $\tau_\beta$ , und mit  $\tau_\beta = \tau / \sin \beta$  folgt aus (5.14)

$$\tau_\beta = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \sin \beta = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \sqrt{1 - (z/R)^2}. \quad (5.15)$$

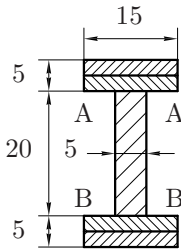
Auch  $\tau_\beta$  erreicht also für  $z = 0$  den Maximalwert  $(\tau_\beta)_{\max} = \tau_{\max} = (4/3)Q/(\pi R^2)$ . Die Verteilung von  $\tau_\beta$  bezüglich  $z$  ist elliptisch (Abb. 5.6b).

Damit sind die Schubspannungen auf dem Kreisrand bestimmt. Auf der  $z$ -Achse verschwindet die  $y$ -Komponente der Schubspannungen, so daß dort lediglich die durch (5.14) gegebene  $z$ -Komponente wirkt. In der Elastizitätstheorie kann man zeigen, daß die zu einer gegebenen  $z$ -Koordinate gehörenden Schubspannungsvektoren sich gemäß Abb. 5.6a alle näherungsweise in einem Punkt  $P(z)$  schneiden. Damit sind die Schubspannungen infolge Querkraft bei einem Balken mit Kreisquerschnitt an allen Punkten des Querschnitts in sehr guter Näherung bestimmt. Auch für andere einfache Balkenquerschnitte können die Schubspannungen auf ähnliche Weise abgeschätzt werden.

Man beachte, daß wir bei der Herleitung von (5.7) die lineare Verteilung der Biegespannungen verwendet haben, die in Kapitel 4 unter der Annahme eben bleibender Querschnitte gewonnen wurde. Die hier berechneten, ungleichförmigen Schubspannungsverteilungen sind aber mit dieser BERNOULLISCHEN Hypothese unverträglich:

Eine nicht gleichförmige Schubspannungsverteilung führt immer zu einer *Verwölbung* der Balkenquerschnitte. Dies bedeutet, daß Punkte, die im unverformten Zustand auf einer zur Balkenachse orthogonalen Ebene liegen, im verformten Zustand nicht mehr in ein und derselben Ebene liegen. Der Ausdruck (5.7) für die Schubspannungsverteilung steht also im Widerspruch zu der ursprünglichen Annahme. Dies ist ein typisches Beispiel dafür, daß die Festigkeitslehre nicht widerspruchsfrei ist, wie wir in der Einführung schon erwähnt hatten. Im Gegensatz dazu ist die *Elastizitätstheorie* eine mathematisch einwandfreie Theorie, sie ist jedoch für die meisten technischen Anwendungen zu kompliziert. Die in Kapitel 4 bestimmten Biegespannungen entsprechen in der Regel mit großer Genauigkeit der Wirklichkeit, die hier gewonnenen Aussagen über die Schubspannungen sind ungenauer.

Wir berechnen nun noch die notwendige zulässige **Schubspannung eines Klebers**, der verwendet wird, um aus mehreren längs zusammengeklebten Holzteilen einen Balkenquerschnitt gemäß Abb. 5.7 herzustellen. Die geometrischen Abmessungen sind der Abbildung zu entnehmen. Die lotrechte Querkraft an der betrachteten Schnittstelle sei  $Q = 2000 \text{ N}$ .



5.7: Querschnitt eines geklebten Balkens

Man kann sich leicht überlegen, daß die kritischen Klebestellen in den Ebenen A–A und B–B auftreten. Hier gilt

$$b(10) = 5 \text{ cm}, \quad S(10) = 5 \cdot 15 \cdot 12,5 = 937,5 \text{ cm}^3 \quad (5.16)$$

und

$$I = \frac{1}{12} (15 \cdot 30^3 - 10 \cdot 20^3) = 27\,083 \text{ cm}^4. \quad (5.17)$$

Damit ergibt sich gemäß (5.7) die Schubspannung

$$|\tau| = \frac{Q \cdot S(10)}{I \cdot b(10)} = 14 \text{ N/cm}^2 \quad (5.18)$$

in den Klebeflächen A–A und B–B. Dies ist eine untere Schranke für die zulässige Schubspannung des zu verwendenden Klebers.

## 5.2 Dünnwandige offene Querschnitte und der Schubmittelpunkt\*

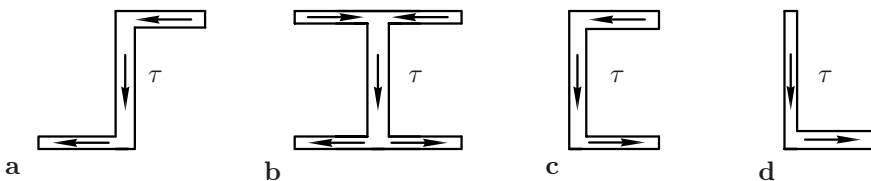
Wir haben schon gesehen, daß die Schubspannungen am Querschnittsrand tangential zu diesem verlaufen. Mit dieser Erkenntnis ist es möglich, die Schubspannungen in dünnwandigen Querschnitten näherungsweise zu bestimmen. Wir beschränken uns dabei in diesem Abschnitt auf offene Querschnitte, wie sie in Abb. 5.8 beispielhaft dargestellt sind. Wenn die Wandstärken klein genug sind, können wir annehmen, daß die Schubspannungen in erster Näherung über die gesamte Dicke konstant sind. Damit hängen die Schubspannungen nur noch von der Bogenlänge  $s$  ab, die längs der Mittellinie des Profils gemessen wird (Abb. 5.9). Ähnlich wie schon in Abb. 5.2 schneiden wir ein Balkenteil der Dicke  $dx$  aus dem Balken heraus, das sich bis zu der durch die Bogenlänge  $s$  gekennzeichneten Stelle erstreckt. Mit der Wandstärke  $t(s)$  ergibt sich das Gleichgewicht der Kräfte in  $x$ -Richtung jetzt als

$$\tau(s) t(s) = \int_{\bar{A}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dA, \quad (5.19)$$

wobei sich das Integral über die Stirnfläche  $\bar{A}$  des abgeschnittenen Teils erstreckt. Daraus folgt mit (5.4)

$$\tau(s) = - \frac{Q(x) S(s)}{I_y t(s)}, \quad (5.20)$$

ganz analog zu (5.7). Die Größe  $S(s)$  ist dabei das *statische Moment* der an der Stelle  $s$  abgeschnittenen Teilfläche bezüglich der  $y$ -Achse. Die so berechneten Schubspannungen sind natürlich nur Näherungswerte für die wirklich vorhandenen Spannungen. An den Ecken, d.h. an den Verbindungsstellen der einzelnen dünnwandigen Teile der Querschnitte der Abb. 5.8 treten Spannungen auf, die durch diese einfache Formel nicht erfaßt werden.

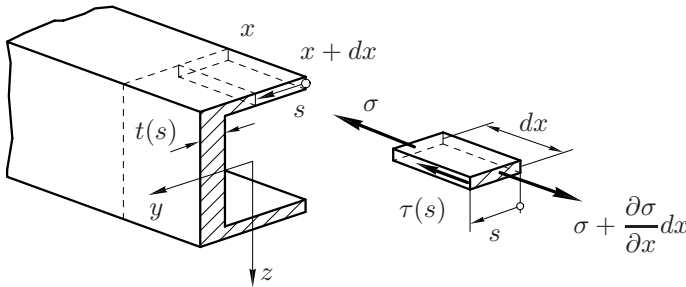


5.8: Beispiele dünnwandiger offener Querschnitte

Im ersten Beispiel berechnen wir die Schubspannungen für den **dünnwandigen, offenen Querschnitt** der Abb. 5.10a mit  $t_1, t_2 \ll b, h$ . Das Flächenträgheitsmoment ergibt sich leicht zu

$$I_y = \frac{1}{12} t_2 h^3 + 2t_1 b \left( \frac{h}{2} \right)^2. \quad (5.21)$$



5.9: Zur Berechnung der Schubspannung  $\tau(s)$ 

Das statische Moment für den oberen Flansch, d.h. für  $0 \leq s \leq b$  ist gemäß Abb. 5.10b

$$S(s) = -s t_1 \frac{h}{2}, \quad (5.22)$$

und für den Steg, d.h. für  $b < s \leq b + h$  gilt

$$S(s) = -b t_1 \frac{h}{2} - (s - b) t_2 \left[ \frac{h}{2} - \frac{s - b}{2} \right] \quad (5.23)$$

(s. Abb. 5.10c). Auch für den unteren Flansch kann  $S(s)$  leicht berechnet werden, wegen der Symmetrie ist das aber nicht erforderlich. Damit können wir mittels (5.20) die Schubspannung berechnen. Sie ist offensichtlich in den Flanschen eine lineare Funktion der Bogenlänge  $s$ , im Steg dagegen quadratisch in  $s$ . In Abb. 5.12 sind die Schubspannungen für den Sonderfall  $t_2 = 2t_1$ ,  $h = b$  dargestellt. Infolge der Unstetigkeit der Wandstärke an der Ecke zwischen Steg und Flansch ergibt sich ein Sprung im Betrag der Schubspannung. Allerdings kann man direkt anhand von (5.20) erkennen, daß der Schubfluß  $\tau(s)t(s)$  stetig ist (die Funktion  $S(s)$  ist immer stetig). In den Ecken selbst ist die Schubspannung nur sehr unzureichend durch die einfache Formel (5.20) bestimmt, selbst wenn sich eine stetige Funktion  $\tau(s)$  ergibt.

Aus dem Verlauf der Schubspannungen, wie er in Abb. 5.8c angegeben ist, erkennt man, daß sie ein Moment um die  $x$ -Achse erzeugen. Dieses Moment ergibt sich aus den mit Hebelarm  $h/2$  in den waagrecht in den Flanschen wirkenden Schubspannungen und den mit Hebelarm  $e$  (s. Abb. 5.11) lotrecht im Steg wirkenden Schubspannungen zu

$$M_x = -2 \frac{h}{2} \frac{Q}{I} \int_0^b S(s) ds - e \frac{Q}{I} \int_b^{b+h} S(s) ds, \quad (5.24)$$

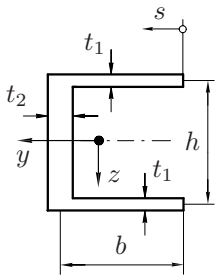
wobei

$$e = \frac{2bt_1 \frac{b}{2}}{2bt_1 + ht_2} = \frac{b^2 t_1}{2bt_1 + ht_2} \quad (5.25)$$

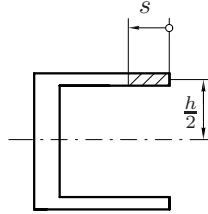
die Schwerpunktlage des Querschnitts bestimmt.

Für den schon betrachteten Sonderfall  $t_2 = 2t_1$ ,  $h = b$  ergibt sich  $e = b/4$ , und nach kurzer Zwischenrechnung folgt aus (5.24)

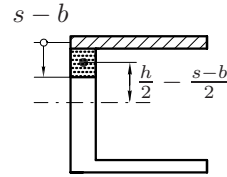
$$M_x = \frac{5}{8} b Q . \tag{5.26}$$



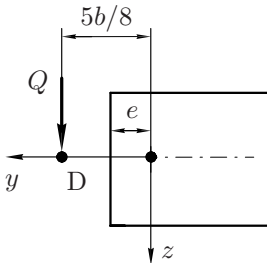
5.10a: Querschnitt



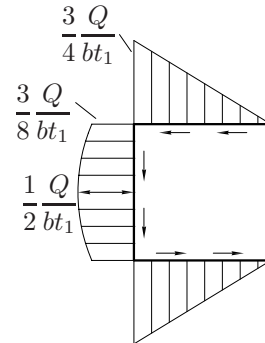
5.10b: Statisches Moment: Flansch



5.10c: Statisches Moment: Steg



5.11: Schubmittelpunkt D



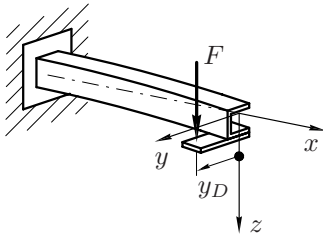
5.12: Schubspannungsverteilung

Die berechneten Schubspannungen sind also in diesem Beispiel äquivalent zu einer lotrechten Einzelkraft  $Q$ , die nicht durch den Flächenschwerpunkt  $S$  geht, sondern um die Strecke der Länge  $5b/8$  gemäß Abb. 5.11 verschoben ist. Der Punkt der Symmetrieachse, der dieser Wirkungslinie der Kraft  $Q$  entspricht, ist in Abb. 5.11 mit  $D$  gekennzeichnet; er wird als *Schubmittelpunkt* des Querschnitts bezeichnet. Für den allgemeinen Fall des Querschnitts der Abb. 5.8c schreiben wir (5.24) als

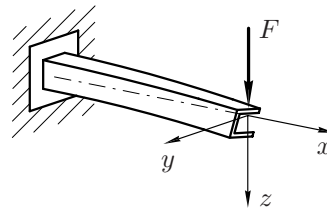
$$M_x = y_D Q \tag{5.27}$$

mit

$$y_D := -\frac{h}{I} \int_0^b S(s) ds - \frac{e}{I} \int_b^{b+h} S(s) ds . \tag{5.28}$$



5.13a: Reine Biegung (Kraft  $F$  greift im Schubmittelpunkt an)



5.13b: Biegung und Torsion

Lediglich wenn die Querkraft gemäß Abb. 5.13a im Schubmittelpunkt wirkt, wird sich der Balken ausschließlich in der  $x, z$ -Ebene verbiegen. Falls die Querkraft in einem anderen Punkt, z.B. im Flächenschwerpunkt wirkt, kommt es noch zu einer Verdrehung des Querschnitts um die  $z$ -Achse, d.h. zu Torsion (Abb. 5.13b). In Kapitel 6 werden wir sehen, daß offene Querschnitte, wie wir sie hier behandeln, sehr empfindlich auf Torsionsmomente reagieren. Es ist deswegen für solche Querschnitte wichtig, den Schubmittelpunkt möglichst genau zu kennen. Anders verhält es sich bei geschlossenen, z.B. bei kastenförmigen Querschnitten: Sie sind recht torsionssteif, so daß die genaue Kenntnis des Schubmittelpunktes dort oft nicht so wichtig ist.

Im zweiten Beispiel untersuchen wir die Schubspannungsverteilung in dem **geschlitzten, dünnwandigen Kreisquerschnitt** der Abb. 5.14a. Das Flächenträgheitsmoment ist das gleiche wie das des geschlossenen Kreisquerschnitts:

$$I_y = \frac{1}{2} I_p = \frac{1}{2} R^2 2\pi R t = \pi R^3 t . \quad (5.29)$$

Für das statische Moment gilt

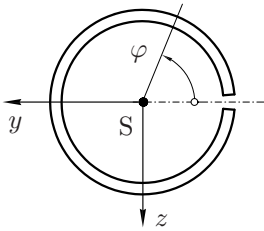
$$S(\varphi) = - \int_0^\varphi R (\sin \bar{\varphi}) t R d\bar{\varphi} = -R^2 t (1 - \cos \varphi), \quad (5.30)$$

so daß sich für die Schubspannungen

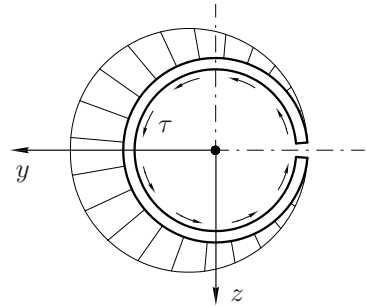
$$\tau(\varphi) = - \frac{QS}{I_y t} = \frac{Q(1 - \cos \varphi)}{\pi R t} \quad (5.31)$$

ergibt. Die entsprechende Schubspannungsverteilung ist in Abb. 5.14b dargestellt, und das Maximum wird an der Stelle  $\varphi = \pi$  erreicht. Wir berechnen nun noch den Schubmittelpunkt. Das Moment der Schubspannungen bezüglich des Flächenschwerpunktes  $S$  ist

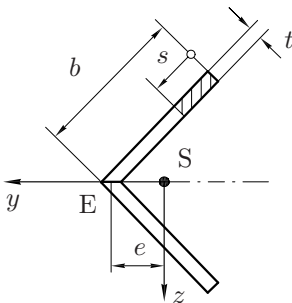
$$M = \int_0^{2\pi} \tau R t R d\varphi = Q R \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi) d\varphi = 2 R Q ; \quad (5.32)$$



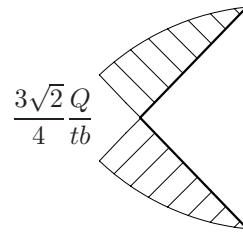
5.14a: Dünnwandiger geschlitzter Kreisquerschnitt



5.14b: Die Schubspannungsverteilung



5.15a: Rechtwinkliger Querschnitt



5.15b: Die Schubspannungsverteilung

demnach liegt der Schubmittelpunkt auf der  $y$ -Achse an der Stelle  $y_D = 2R$ .

Abschließend bestimmen wir noch die Schubspannungen in dem Balkenquerschnitt der Abb. 5.15, der aus einem **dünnwandigen, rechten Winkel** besteht. Der Abstand des Schwerpunktes  $S$  von der Ecke ergibt sich zu  $e = (\sqrt{2}/2)b$ , und das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts ist  $I_y = tb^3/3$ . Für das statische Moment gilt

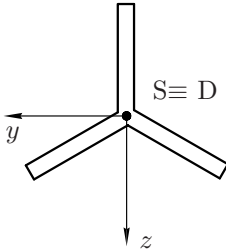
$$S(s) = -ts \left( b - \frac{s}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} ts^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} tbs. \quad (5.33)$$

Aus  $\frac{dS}{ds} = 0$  folgt  $s = b$ , und an dieser Stelle ergibt sich das betragsmäßige Maximum der Schubspannung

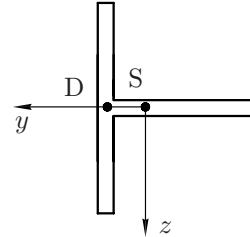
$$\tau_{\max} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{Q}{tb}. \quad (5.34)$$

Die Schubspannungsverteilung ist in Abb. 5.15b dargestellt. Da hier die Wirkungslinien der Schubspannungsvektoren alle durch die Ecke  $E$  des Querschnitts gehen,

erkennen wir auch ohne Rechnung, daß der Schubmittelpunkt  $D$  mit der Ecke  $E$  identisch ist. Auch in den Querschnitten der Abb. 5.16 kann der Schubmittelpunkt  $D$  unmittelbar angegeben werden.



**5.16a:** Schubmittelpunkt und Schwerpunkt fallen zusammen



**5.16b:** Der Schubmittelpunkt liegt nicht im Schwerpunkt

## 5.3 Vergleich der Verformungen und Spannungen infolge Biegung und Schub

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir mehrfach behauptet, daß die Schubspannungen infolge Querkraft meist klein gegenüber den Biegespannungen sind. Wir wollen das anhand des Kragträgers der Abb. 5.17 zumindest für einen Rechteckquerschnitt plausibel machen. Bei den in Abschnitt 5.2 behandelten dünnwandigen Querschnitten ist die Situation komplizierter. Die maximale Biegespannung im Kragträger tritt offensichtlich an der Einspannung auf, sie ist durch

$$\sigma_{\max} = \frac{Fl}{W} = \frac{6Fl}{bh^2} \quad (5.35)$$

gegeben. Die Querkraft ist für den ganzen Balken konstant, so daß auch die Schubspannungen nicht von  $x$  abhängen. Nach (5.11) ist die maximale Schubspannung

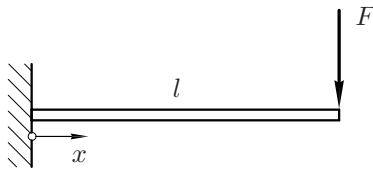
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh} \quad (5.36)$$

Somit ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{1}{4} \frac{h}{l} \quad (5.37)$$

zwischen maximaler Schubspannung und maximaler Biegespannung bei dem Kragträger der Abb. 5.17, sofern wir einen Rechteckquerschnitt voraussetzen. Da beim Balken aber stets  $h \ll l$  angenommen wird, sind in der Tat die Schubspannungen sehr viel kleiner als die Biegespannungen.

Bei dem betrachteten Balkenquerschnitt liegt in guter Näherung ein ebener Spannungszustand vor. Die Hauptspannungen an einem beliebigen Punkt des Balkens sind daher nicht identisch mit den Biegenormalspannungen im geraden Schnitt. Die Hauptspannungen können mit den Formeln aus Kapitel 3 aus den Biegenormalspannungen und den Schubspannungen infolge Querkraft berechnet werden. Die Schubspannungen infolge Querkraft sind im allgemeinen jedoch sehr klein, so daß in den meist für die Bemessung kritischen Randregionen in guter Näherung ein einachsiger Spannungszustand vorliegt. Dabei ist die Randfaserspannung der Biegung auch gerade Hauptnormalspannung. In Balkenmitte allerdings liegt ein zweiachsiger Spannungszustand vor (reiner Schub), jedoch mit der sehr kleinen Hauptspannung  $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \tau_{\max}$  gemäß (5.36).



5.17: Kragträger

Auch die Verformungen infolge Querkraft sollen noch grob abgeschätzt werden. Der Biegepfahl  $f = w(l)$  des Kragträgers der Abb. 5.17 ist

$$f = \frac{F l^3}{3 EI} = 4 \frac{F l^3}{E b h^3} . \quad (5.38)$$

Die Querkraft verursacht eine zusätzliche Absenkung  $\Delta f$  dieses Punktes, deren Berechnung Schwierigkeiten macht. Zu einer groben Abschätzung von  $\Delta f$  gelangen wir, wenn wir gemäß Abb. 5.18 die parabelförmig verteilte Schubspannung durch ihren mittleren Wert  $\tau = F/bh$  über den Balkenquerschnitt ersetzen. Dann gilt

$$\Delta f \approx l \gamma, \quad \tau = G \gamma \quad (5.39)$$

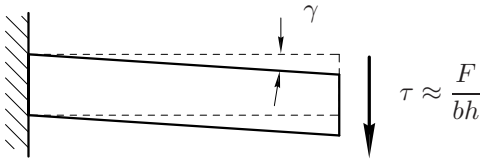
mit  $\gamma = \tau/G$  (HOOKEsches Gesetz). Bei den meisten Materialien ist  $G \approx E/3$ , so daß aus (5.39)

$$\Delta f \approx \frac{3 l F}{b h E} \quad (5.40)$$

folgt. Vergleichen wir die Absenkung infolge Querkraft mit dem Biegepfahl infolge des Momentes, so ergibt sich

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{3}{4} \frac{h^2}{l^2} \ll 1 . \quad (5.41)$$

Das Verhältnis der Verformungen infolge Schub und Biegung ist also noch viel kleiner als das der entsprechenden Spannungen.



**5.18:** Grobe Abschätzung der Schubverformung am Kragträger

## 5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die im geraden Schnitt eines gebogenen Balkens auftretenden Schubspannungen näherungsweise berechnet. Eine genauere Bestimmung dieser Schubspannungen ist nur mit größerem mathematischen Aufwand möglich und ist Gegenstand der Elastizitätstheorie.

Bei Biegung eines Balkens mit Rechteckquerschnitt um die  $y$ -Achse gilt für die lotrechten Schubspannungen im geraden Schnitt

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{b h} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad (5.42)$$

d.h. es liegt ein parabolischer Verlauf bezüglich  $z$  vor. Die maximale Schubspannung

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b h} \quad (5.43)$$

im geraden Schnitt tritt also gerade in der neutralen Faser  $z = 0$  auf.

Für andere Vollquerschnitte von Balken kann die Verteilung der Schubspannungskomponenten (in  $z$ -Richtung) gemäß

$$\tau(x, z) = - \frac{Q(x) S(z)}{I_y b(z)} \quad (5.44)$$

bestimmt werden. Hierbei ist  $Q(x)$  die Querkraft an der Stelle  $x$ ,  $I_y$  das Flächenträgheitsmoment,  $b(z)$  die Breite des Querschnitts an der Stelle  $z$  und

$$S(z) = \int_{z_o}^z \bar{z} dA \quad (5.45)$$

das Flächenmoment erster Ordnung der Teilfläche des Querschnitts, die zwischen der durch den Wert von  $z$  gekennzeichneten Geraden und dem oberen Rand liegt. (Da  $z$  vom Flächenschwerpunkt aus gezählt wird, kann in (5.45) auch der Wert  $z_u$

für die untere Randfaser anstelle von  $z_o$  verwendet werden, wobei allerdings das Minuszeichen in (5.44) wegfällt.)

Bei sehr dünnwandigen offenen Querschnitten kann man näherungsweise annehmen, daß die Schubspannungen parallel zur Nulllinie des Profils verlaufen. Sie können gemäß

$$\tau(s) = -\frac{Q(x) S(s)}{I_y t(s)} \quad (5.46)$$

berechnet werden. Die Bogenlänge  $s$  wird dabei von einem oberen Endpunkt des dünnwandigen Profils gewählt;  $t(s)$  ist die Profildicke an der Stelle  $s$  und  $S(s)$  das Flächenträgheitsmoment erster Ordnung der an der Stelle  $s$  abgeschnittenen Teilfläche bezüglich der  $y$ -Achse. Es zeigt sich, daß diese Schubspannungen i.a. nicht äquivalent zu einer lotrechten Einzelkraft  $Q$  im Flächenschwerpunkt sind, sondern zu einer Einzelkraft  $Q$  im sogenannten *Schubmittelpunkt*.